

# Computabilità

C.d.S. magistrale in Matematica

*Prof. Domenico Cantone*

**A.A. 2019/20**

## PROGRAMMA

### I PARTE: TEORIA DELLA CALCOLABILITA'

#### FUNZIONI CALCOLABILI

- ALGORITMI, PROCEDURE EFFETTIVE
- IL MODELLO URM (UNLIMITED REGISTER MACHINE)
- FUNZIONI URM-CALCOLABILI
- PREDICATI E PROBLEMI DECIDIBILI
- CALCOLABILITA' SU ALTRI DOMINI

## GENERAZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI

- FUNZIONI CALCOLABILI DI BASE
- UNIONE DI PROGRAMMI
- SOSTITUZIONE
- RICORSIONE
- MINIMALIZZAZIONE

## TESI DI CHURCH

- ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA'
- FUNZIONI PARZIALMENTE RICORSIVE
- FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE
- MACCHINE DI TURING
- (SISTEMI DI POST E MARKOV)
- TESI DI CHURCH-TURING

## ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI CALCOLABILI E I PROGRAMMI UNIVERSALI

- IL METODO DIAGONALE
- IL TEOREMA S-M-N
- FUNZIONI E PROGRAMMI UNIVERSALI
- DUE APPLICAZIONI DEL PROGRAMMA UNIVERSALE
- PROBLEMI INDECIDIBILI
- TEOREMA DI RICORSIONE

### LIBRO DI TESTO:

N.J. CUTLAND: "COMPUTABILITY",  
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1986.

PERSONAGGI E IDEE CHE  
HANNO CONTRIBUITO ALLA NASCITA DELLA  
COMPUTABILITA' COME DISCIPLINA  
(E DEL CALCOLATORE UNIVERSALE)



- SOGNO DI LEIBNIZ
- LA CARATTERISTICA UNIVERSALE
- IL CALCULUS RATIOCINATOR
- RUOTA DI LEIBNIZ
- NOTAZIONE
- MINIERE DELLO HARZ

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ  
(LIPSIA 1646 - HANNOVER 1716)

ALGEBRIZZAZIONE DELLA  
LOGICA (PROPOSIZIONALE)



GEORGE BOOLE  
(1815 - 1864)



- IDEOGRAFIA

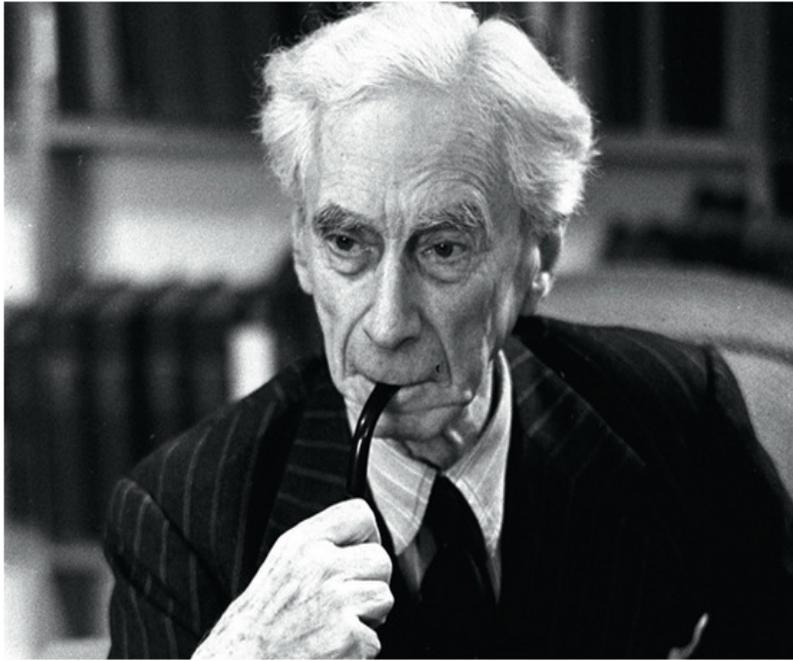
- LOGICISMO

- ANTIINDICIA DI ...

FRIEDRIC LUDWIG GOTTLÖB FREGE

(WISMAR 1848 - BAD KLEINEN 1925)

## PARADOSSO DI RUSSELL



SIA  $U = \{x : x \notin x\}$ .

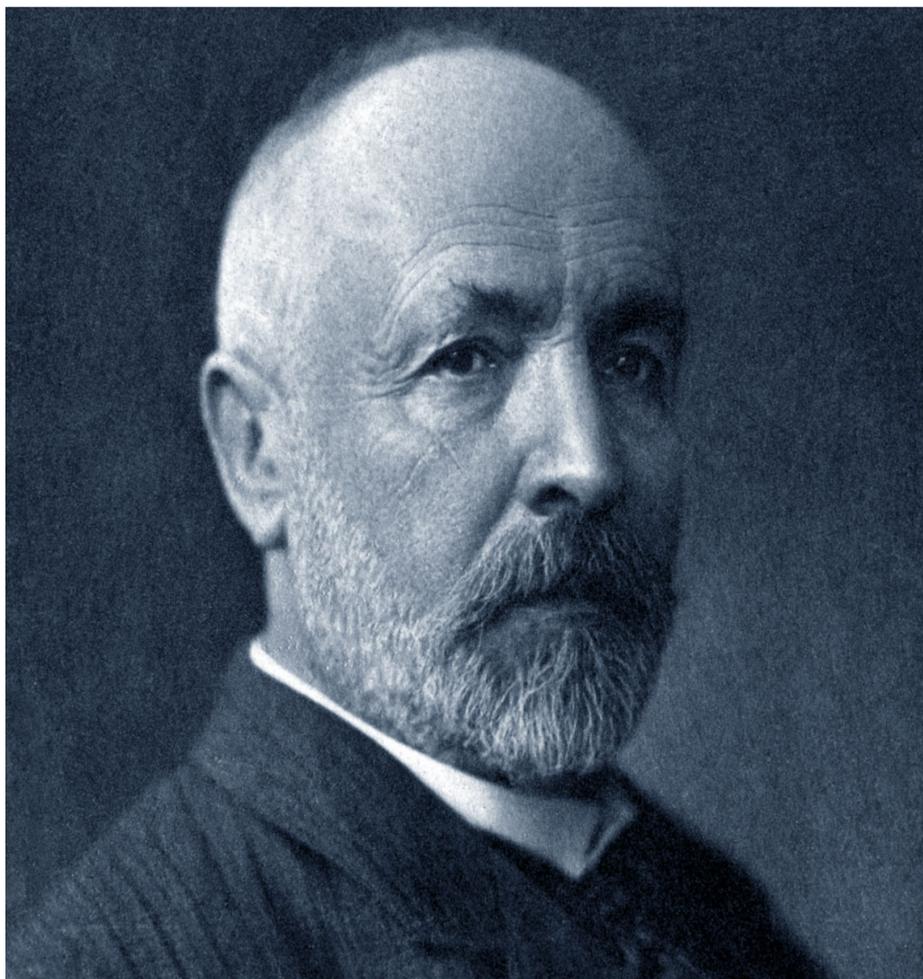
$U \in U$  ?

$U \in U \rightarrow U \notin U$

$U \notin U \rightarrow U \in U$

BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL

(1872 - 1970)



DIAGONALIZZAZIONE

GEORG CANTOR

(SAN PIETROBURGO 1845 - HANNOVER 1918)



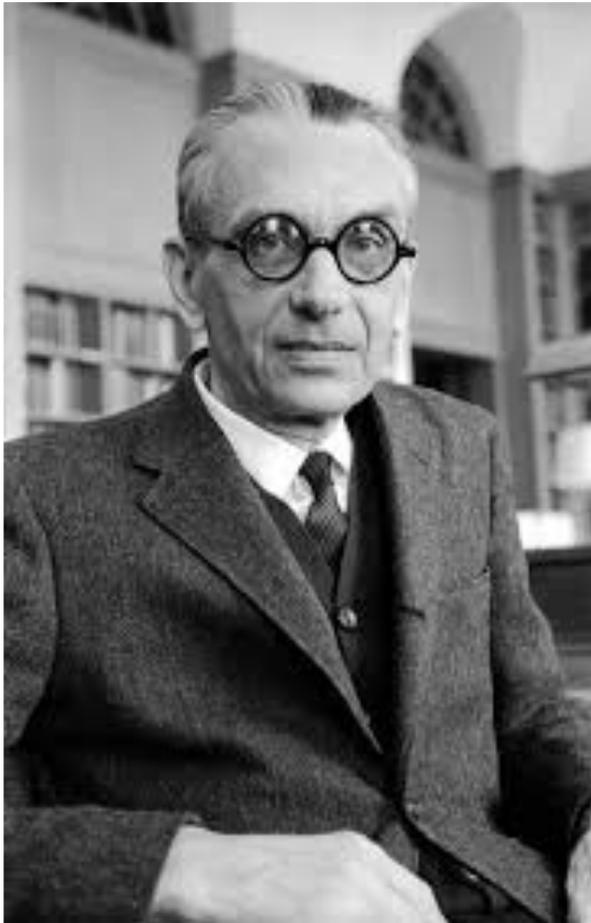
- FORMALISMO
- PROBLEMI
- PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA LOGICA
- NON ESISTONO "IGNORABIMUS" IN MATEMATICA

WIR MÜSSEN WISSEN  
WIR WERDEN WISSEN

[ DOBBIAMO SAPERE / SAPREMO ]

DAVID HILBERT

(1862 - 1943)



TEOREMI DI INCOMPLETEZZA

KURT GÖDEL

(BRNO 1906 - PRINCETON 1978)



- INDECIDIBILITA' DELL'ARITMETICA  
( $\lambda$ -CALCOLO)

ALONZO CHURCH  
(WASHINGTON 1903 - HUDSON 1955)

INDECIDIBILTA' DELL'ARITMETICA  
(MACCHINE DI TURING)



ALAN TURING  
(LONDRA 1912 - WILMSLOW 1954)



MARTIN DAVIS  
(1928)

Outstanding Contributions to Logic 10

Eugenio G. Omodeo  
Alberto Policriti *Editors*

# Martin Davis on Computability, Computational Logic, and Mathematical Foundations

 Springer

# GÖDEL E EINSTEIN A PRINCETON



## TEORIA DELLA CALCOLABILITÀ

### CENNI STORICI:

NASCE CON I LAVORI DI ALAN TURING E ALONZO CHURCH CHE INTORNO AL 1936 HANNO DATO UNA SOLUZIONE NEGATIVA AL PROBLEMA DELLA DECISIONE PER LA LOGICA DEL 1° ORDINE CONSIDERATO DA DAVID HILBERT TRA I PROBLEMI PIÙ IMPORTANTI DEL SUO TEMPO

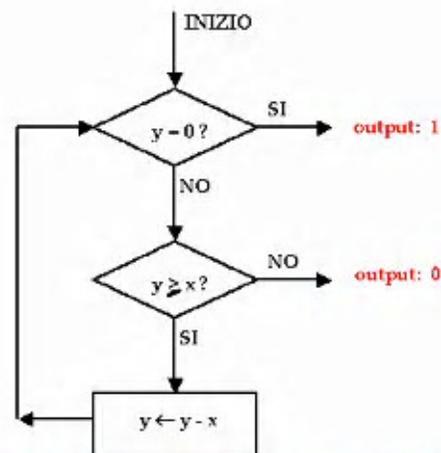
- PER RISOLVERE *IN POSITIVO* UN PROBLEMA ALGORITMICO E' SUFFICIENTE ESIBIRE UNA PROCEDURA IN UN FORMALISMO ACCETTABILE.

- ES.
- ALGORITMO DI EUCLIDE
  - ALGORITMI PER LE 4 OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI
  - ALGORITMO DI FATTORIZZAZIONE
  - CRIVELLO DI ERATOSTENE
  - TEST DI DIVISIBILITA'

...

ESEMPIO: TEST DI DIVISIBILITA':  $y$  E' DIVISIBILE PER  $z$ ?

FORMALISMO: DIAGRAMMI DI FLUSSO  $\exists z: y = xz?$



- SI PUO' DIMOSTRARE CHE:

- IL PROCESSO DI CALCOLO TERMINA SEMPRE
- SE L'OUTPUT E' 1 E L'ASSEGNAIMENTO  $y \leftarrow y - x$  E' ESEGUITO  $z$  VOLTE, ALLORA VALE  $y = z \cdot x$
- SE L'OUTPUT E' 0 ALLORA  $y$  NON E' DIVISIBILE PER  $x$

QUINDI IL TEST DI DIVISIBILITA' E' COMPUTABILE

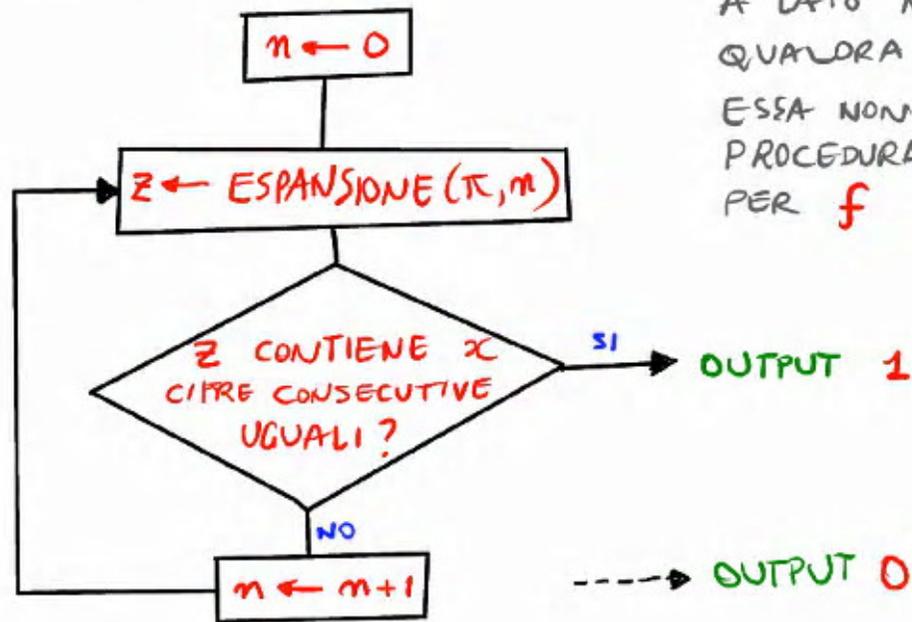
## ESEMPIO

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ESPANSIONE DECIMALE DI } \pi \text{ CONTIENE} \\ & \text{ESATTAMENTE } x \text{ CIFRE CONSECUTIVE EGUALI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PUR DISPONENDO DI UNA PROCEDURA FINITA CHE PER OGNI  $n$  CALCOLA L'ESPANSIONE DI  $\pi$  CON  $n$  CIFRE DECIMALI, ALLO STATO ATTUALE DELLE CONOSCENZE NON SI DISPONE DI UN PROCESSO DI CALCOLO PER  $f$ .

ESempio (CONTINUA)



• POICHE' LA PROCEDURA A LATO NON SI FERMA QUANDRA  $f(x) = 0$ , ESSA NON E' UNA PROCEDURA DI CALCOLO PER  $f$

- PER RISOLVERE IN NEGATIVO UN PROBLEMA ALGORITMICO È NECESSARIO AVERE UN'IDEA CHIARA DI TUTTI I POSSIBILI ALGORITMI E QUINDI FARE VEDERE CHE CIASCUNO DI ESSI NON È IN GRADO DI RISOLVERE IL PROBLEMA IN ESAME
- OCCORRE QUINDI FORMALIZZARE IL CONCETTO INTUITIVO DI ALGORITMO:  
SEQUENZA DI ISTRUZIONI CIASCUNA DELLE QUALI PUÒ ESSERE ESEGUITA IN MANIERA NON AMBIGUA ED EFFETTIVA DA UN'OPPORTUNA MACCHINA

- IL PROBLEMA DIVENTA ALLORA QUELLO DI FORMALIZZARE UN OPPORTUNO MODELLO DI CALCOLO UNIVERSALE (MACCHINA)
- SONO STATI PROPOSTI PARECCHI MODELLI:
  - MACCHINE DI TURING (TURING, 1936)
  - $\lambda$ -CALCOLO (CHURCH, 1936)
  - FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE (GÖDEL-KLEENE, 1936)
  - SISTEMI DEDUTTIVI CANONICI (POST, 1945)
  - SISTEMI DI MARKOV (MARKOV, 1951)
  - MACCHINE A REGISTRI ILLIMITATI (URM)  
(SHEPHERDSON & STURGIS, 1936)

- CIASCUNO DI TALI SISTEMI DA' LUOGO AD UNA DEFINIZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI (OVVERO DI PROBLEMI RISOLVIBILI IN MANIERA EFFETTIVA)
- E' INTERESSANTE OSSERVARE CHE TUTTI I SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO DEFINISCONO LA MEDESIMA CLASSE DI FUNZIONI CALCOLABILI

### TESI DI CHURCH-TURING

UNA FUNZIONE E' CALCOLABILE SE E SOLO SE E' CALCOLABILE IN UNO DEI SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO.