

Computabilità

C.d.S. magistrale in Matematica

Prof. Domenico Cantone

A.A. 2019/20

PROGRAMMA

I PARTE: TEORIA DELLA CALCOLABILITA'

FUNZIONI CALCOLABILI

- ALGORITMI, PROCEDURE EFFETTIVE
- IL MODELLO URM (UNLIMITED REGISTER MACHINE)
- FUNZIONI URM-CALCOLABILI
- PREDICATI E PROBLEMI DECIDIBILI
- CALCOLABILITA' SU ALTRI DOMINI

GENERAZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI

- FUNZIONI CALCOLABILI DI BASE
- UNIONE DI PROGRAMMI
- SOSTITUZIONE
- RICORSIONE
- MINIMALIZZAZIONE

TESI DI CHURCH

- ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA'
- FUNZIONI PARZIALMENTE RICORSIVE
- FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE
- MACCHINE DI TURING
- (SISTEMI DI POST E MARKOV)
- TESI DI CHURCH-TURING

ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI CALCOLABILI E I PROGRAMMI UNIVERSALI

- IL METODO DIAGONALE
- IL TEOREMA S-M-n
- FUNZIONI E PROGRAMMI UNIVERSALI
- DUE APPLICAZIONI DEL PROGRAMMA UNIVERSALE
- PROBLEMI INDECIDIBILI
- TEOREMA DI RICORSIONE

LIBRO DI TESTO:

N.J. CUTLAND: "COMPUTABILITY",
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1986.

PERSONAGGI E IDEE CHE
HANNO CONTRIBUITO ALLA NASCITA DELLA
COMPUTABILITA' COME DISCIPLINA
(E DEL CALCOLATORE UNIVERSALE)



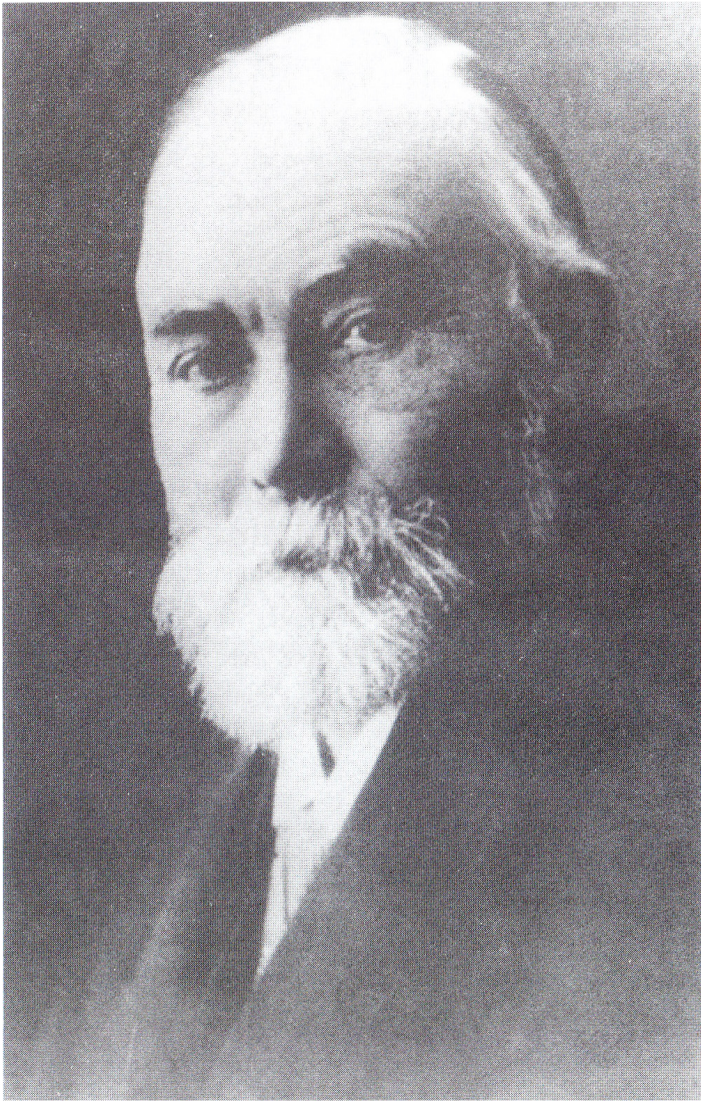
- SOGNO DI LEIBNIZ
- LA CARATTERISTICA UNIVERSALE
- IL CALCULUS RATIOCINATOR
- RUOTA DI LEIBNIZ
- NOTAZIONE
- MINIERE DELLO HARZ

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ
(LIPSIA 1646 - HANNOVER 1716)

ALGEBRIZZAZIONE DELLA
LOGICA (PROPOSIZIONALE)



GEORGE BOOLE
(1815 - 1864)



- IDEOGRAFIA

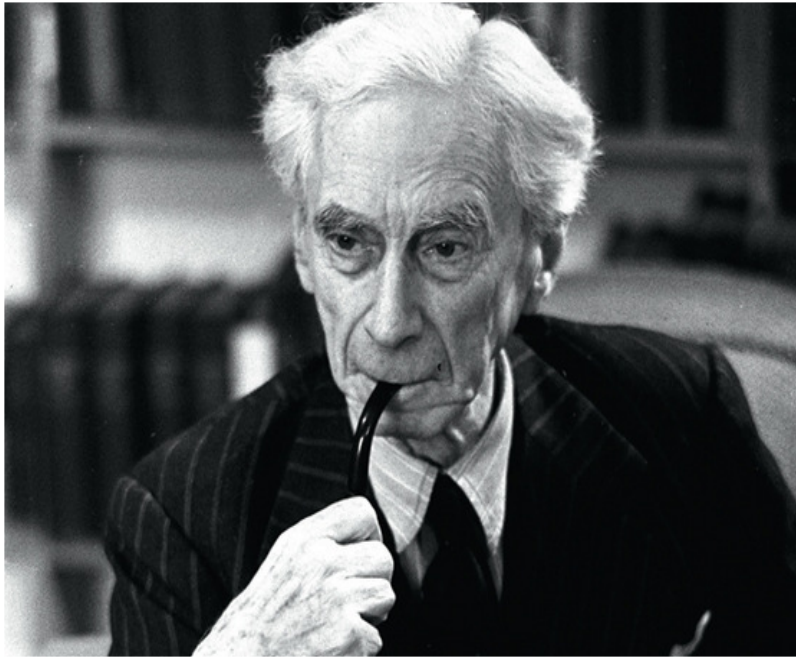
- LOGICISMO

- ANTIINDICIA DI ...

FRIEDRIC LUDWIG GOTTLLOB FREGE

(WISMAR 1848 - BAD KLEINEN 1925)

PARADOSSO DI RUSSELL



SIA $U = \{x : x \notin x\}$.

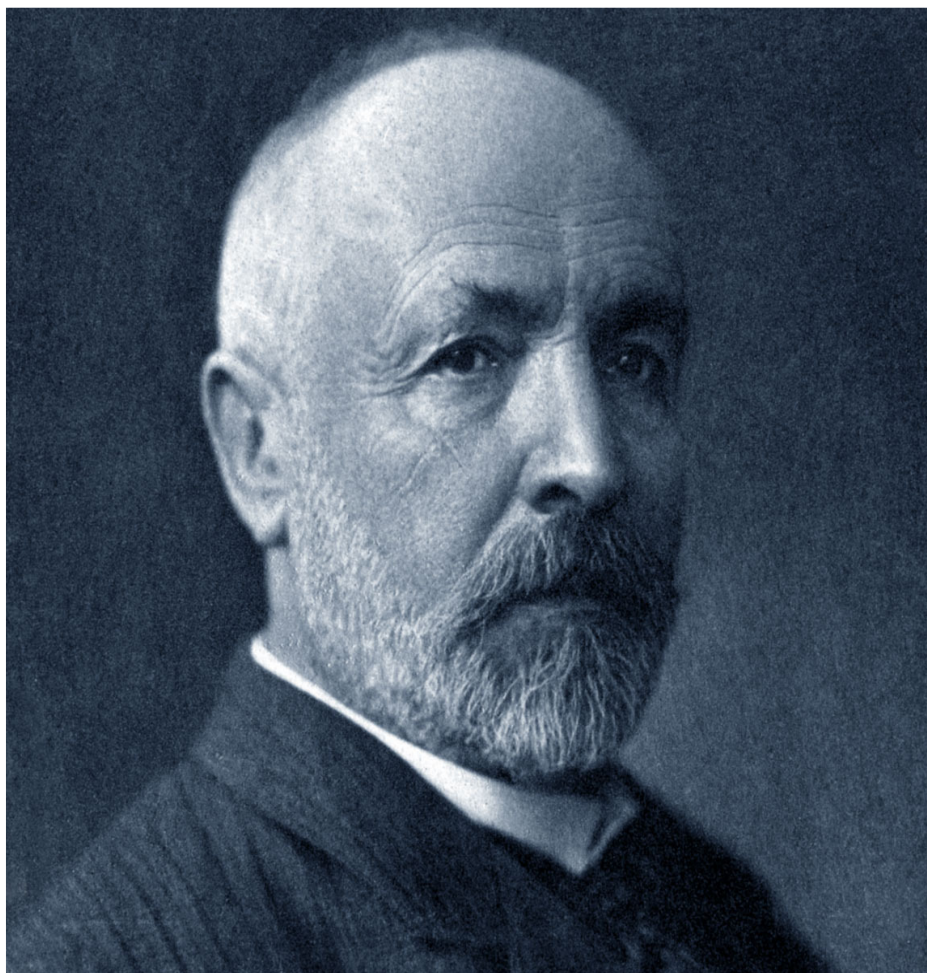
$U \in U$?

$U \in U \rightarrow U \notin U$

$U \notin U \rightarrow U \in U$

BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL

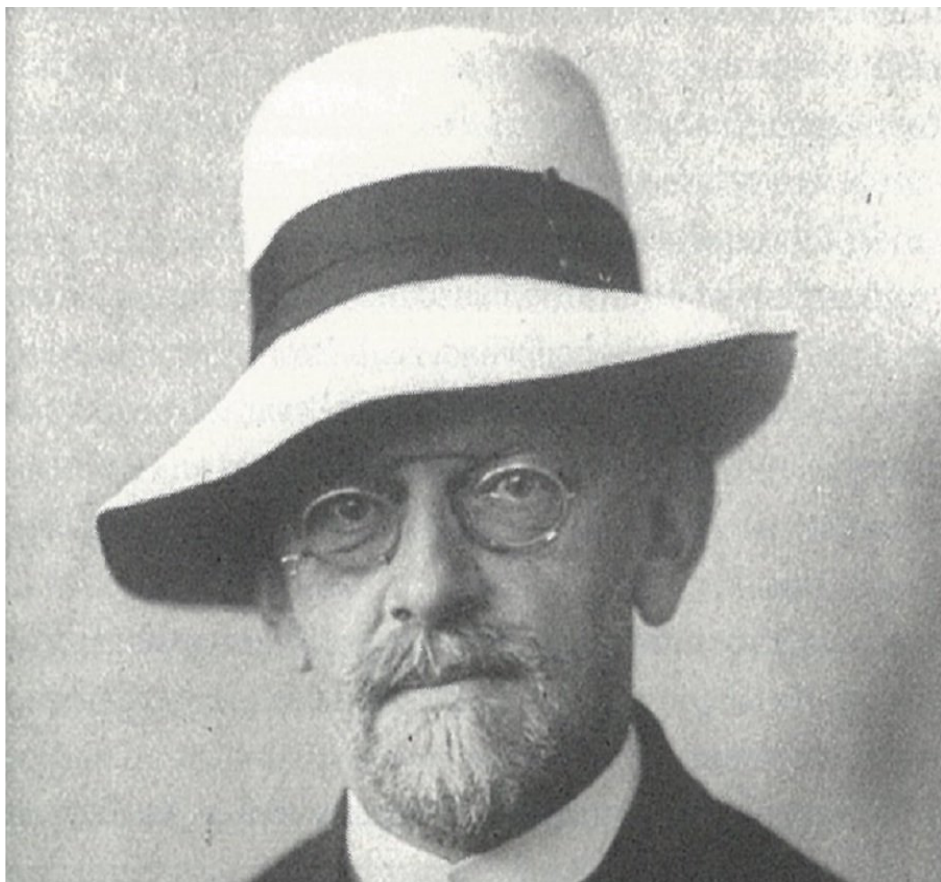
(1872 - 1970)



DIAGONALIZZAZIONE

GEORG CANTOR

(SAN PIETROBURGO 1845 - HANNOVER 1918)

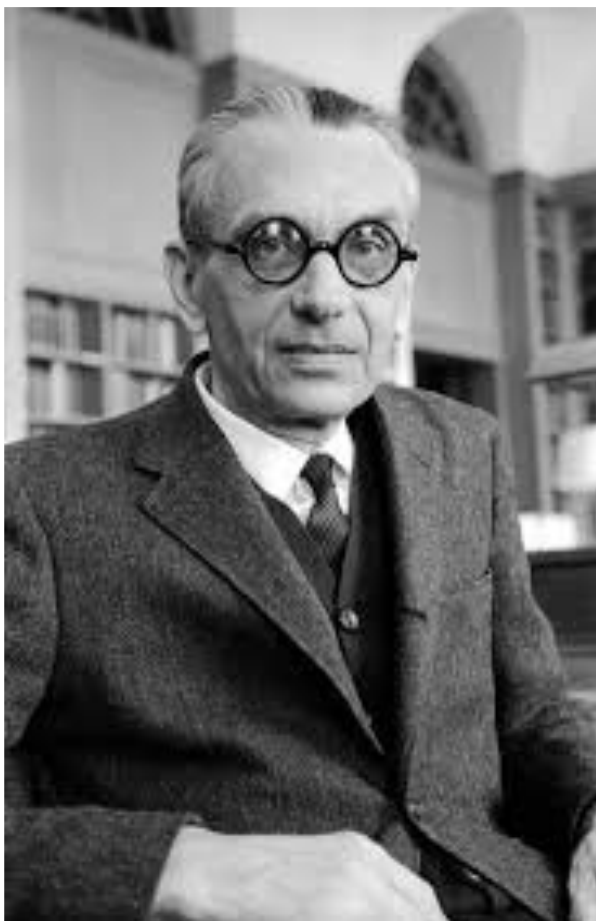


- FORMALISMO
- PROBLEMI
- PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA LOGICA
- NON ESISTONO "IGNORABIMUS" IN MATEMATICA

WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN

[DOBBIAMO SAPERE / SAPREMO]

DAVID HILBERT
(1862 - 1943)



TEOREMI DI INCOMPLETEZZA

KURT GÖDEL

(BRNO 1906 - PRINCETON 1978)



- INDECIDIBILITA' DELL'ARITMETICA
(λ -CALCOLO)

ALONZO CHURCH
(WASHINGTON 1903 - HUDSON 1955)

INDECIDIBILTA' DELL'ARITMETICA
(MACCHINE DI TURING)



ALAN TURING
(LONDRA 1912 - WILMSLOW 1954)



MARTIN DAVIS
(1928)

Outstanding Contributions to Logic 10

Eugenio G. Omodeo
Alberto Policriti *Editors*

Martin Davis on Computability, Computational Logic, and Mathematical Foundations

 Springer

GÖDEL E EINSTEIN A PRINCETON



TEORIA DELLA CALCOLABILITÀ

CENNI STORICI:

NASCE CON I LAVORI DI ALAN TURING E ALONZO CHURCH CHE INTORNO AL 1936 HANNO DATO UNA SOLUZIONE NEGATIVA AL PROBLEMA DELLA DECISIONE PER LA LOGICA DEL 1° ORDINE CONSIDERATO DA DAVID HILBERT TRA I PROBLEMI PIÙ IMPORTANTI DEL SUO TEMPO

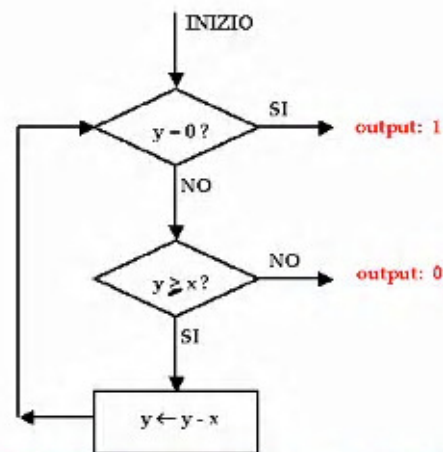
- PER RISOLVERE *IN POSITIVO* UN PROBLEMA ALGORITMICO E' SUFFICIENTE ESIBIRE UNA PROCEDURA IN UN FORMALISMO ACCETTABILE.

- ES.
- ALGORITMO DI EUCLIDE
 - ALGORITMI PER LE 4 OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI
 - ALGORITMO DI FATTORIZZAZIONE
 - CRIVELLO DI ERATOSTENE
 - TEST DI DIVISIBILITA'

...

ESEMPIO: TEST DI DIVISIBILITA': y E' DIVISIBILE PER z ?

FORMALISMO: DIAGRAMMI DI FLUSSO $\exists z: y = xz?$



- SI PUO' DIMOSTRARE CHE:

- IL PROCESSO DI CALCOLO TERMINA SEMPRE
- SE L'OUTPUT E' 1 E L'ASSEGNAIMENTO $y \leftarrow y - x$ E' ESEGUITO z VOLTE, ALLORA VALE $y = z \cdot x$
- SE L'OUTPUT E' 0 ALLORA y NON E' DIVISIBILE PER x

QUINDI IL TEST DI DIVISIBILITA' E' COMPUTABILE

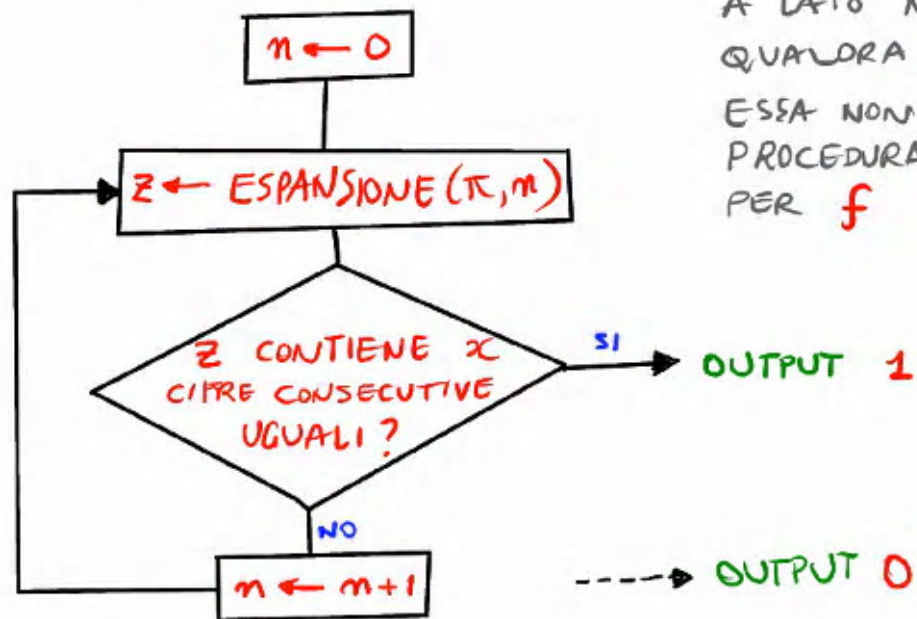
ESEMPIO

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ESPANSIONE DECIMALE DI } \pi \text{ CONTIENE} \\ & \text{ESATTAMENTE } x \text{ CIFRE CONSECUTIVE EGUALI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PUR DISPONENDO DI UNA PROCEDURA FINITA CHE PER OGNI n CALCOLA L'ESPANSIONE DI π CON n CIFRE DECIMALI, ALLO STATO ATTUALE DELLE CONOSCENZE NON SI DISPONE DI UN PROCESSO DI CALCOLO PER f .

ESempio (CONTINUA)



• POICHE' LA PROCEDURA A LATO NON SI FERMA QUANDO $f(x) = 0$, ESSA NON E' UNA PROCEDURA DI CALCOLO PER f

-----> OUTPUT 0

- PER RISOLVERE IN NEGATIVO UN PROBLEMA ALGORITMICO È NECESSARIO AVERE UN'IDEA CHIARA DI TUTTI I POSSIBILI ALGORITMI E QUINDI FARE VEDERE CHE CIASCUNO DI ESSI NON È IN GRADO DI RISOLVERE IL PROBLEMA IN ESAME
- OCCORRE QUINDI FORMALIZZARE IL CONCETTO INTUITIVO DI ALGORITMO:
SEQUENZA DI ISTRUZIONI CIASCUNA DELLE QUALI PUÒ ESSERE ESEGUITA IN MANIERA NON AMBIGUA ED EFFETTIVA DA UN'OPPORTUNA MACCHINA

- IL PROBLEMA DIVENTA ALLORA QUELLO DI FORMALIZZARE UN OPPORTUNO MODELLO DI CALCOLO UNIVERSALE (MACCHINA)
- SONO STATI PROPOSTI PARECCHI MODELLI:
 - MACCHINE DI TURING (TURING, 1936)
 - λ -CALCOLO (CHURCH, 1936)
 - FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE (GÖDEL-KLEENE, 1936)
 - SISTEMI DEDUTTIVI CANONICI (POST, 1945)
 - SISTEMI DI MARKOV (MARKOV, 1951)
 - MACCHINE A REGISTRI ILLIMITATI (URM)
(SHEPARDSON & STURGIS, 1936)

- CIASCUNO DI TALI SISTEMI DA' LUOGO AD UNA DEFINIZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI (OVVERO DI PROBLEMI RISOLVIBILI IN MANIERA EFFETTIVA)
- E' INTERESSANTE OSSERVARE CHE TUTTI I SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO DEFINISCONO LA MEDESIMA CLASSE DI FUNZIONI CALCOLABILI

TESI DI CHURCH-TURING

UNA FUNZIONE E' CALCOLABILE SE E SOLO SE E' CALCOLABILE IN UNO DEI SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO.