LA NOTAZIONE "↑" DI KNUTH

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $$4 \times 3 = \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 12$$

$$a \uparrow b = a^b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ copies of } a}$$

Es. $$4 \uparrow 3 = 4^3 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ copies of } 4} = 64$$

$$a \uparrow\uparrow b = {}^{b}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b\text{ copies of }a} = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a))}_{b\text{ copies of }a}$$

(ASSOCIATIVITÀ A DESTRA)

$$\left(3^3\right)^3 = 3^9$$

ESEMPI

$$4 \uparrow\uparrow 3 = {}^{3}4 = \underbrace{4^{4^4}}_{3\text{ copies of }4} = \underbrace{4 \uparrow (4 \uparrow 4)}_{3\text{ copies of }4} = 4^{256} \approx 1.3 \times 10^{154}$$

$$3^{\left(3^3\right)} -$$

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = \underline{7{,}625{,}597{,}484{,}987}$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7625597484987}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\dots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7,625,597,484,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ copies of } 3} = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \dots \uparrow 3}_{7,625,597,484,987 \text{ copies of } 3}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow (\dots \uparrow\uparrow\uparrow a))}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a \ \ldots\ a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a}_{b \text{ copies of } a}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

SI PONE

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} \equiv \uparrow^{(n)}$$

(ASSOCIATIVITA' A DESTRA)

QUINDI:

$$a \uparrow^{(n)} b = \underbrace{\left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \uparrow^{(n-1)} \left(a \ \ldots \left(a \uparrow^{(n-1)} a\right) \ldots\right)\right)\right)}_{b \text{ volte}}$$

FUNZIONE DI ACKERMANN (QUASI ORIGINALE) $\varphi(m,n,k)$

$$\varphi(m,n,0) = m+n$$

$$\varphi(m,n,1) = m\cdot n$$

$$\varphi(m,n,2) = m^n$$

$$\varphi(m,n,3) = \left.m^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}}\right\} n \text{ volte} = m\uparrow\uparrow n = m\uparrow^{(2)} n \quad , \quad n \geq 1$$

$$\vdots$$

$$\varphi(m,n,k+1) = m\uparrow^{(k)} n \quad , \quad n \geq 1$$

PONIAMO:

$$S_{m,k+1}(n+1) := \varphi(m, n+1, k+1)$$

SI HA:

$$\begin{aligned}
\varphi(m, n+1, k+1) &= S_{m,k+1}(n+1) \\
&= S_{m,k}^{(n+1)}(m) \\
&= S_{m,k}\left(S_{m,k}^{(n)}(m)\right) \\
&= S_{m,k}(\varphi(m, n, k)) \\
&= \varphi(m, \varphi(m, n, k), k)
\end{aligned}$$

VALE DUNQUE LA RICORRENZA

$$\varphi(m, n+1, k+1) = \varphi(m, \varphi(m, n, k), k)$$

COME CONDIZIONI INIZIALI PORREMO:

$$\varphi(m, n, 0) = m+n$$

$$\varphi(0, 0, k+1) = 0$$

$$\varphi(m+1, 0, 1) = 0$$

$$\varphi(m+1, 0, k+2) = 1$$

E' SUFFICIENTE UTILIZZARE LA SEGUENTE VARIANTE DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN:

$$
\begin{cases}
\psi(x,0) = 1 \\
\psi(0,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE} \quad y=0 \\ 2 & \text{SE} \quad y=1 \\ y+2 & \text{SE} \quad y \geq 2 \end{cases} \\
\psi(x+1,y+1) = \psi(x, \psi(x+1,y))
\end{cases}
$$

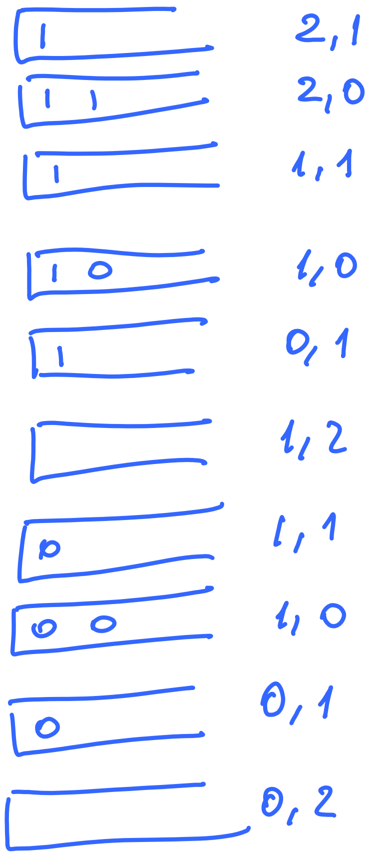
VALE: $\psi(x,y) = 2 \uparrow^{(x-1)} y = \varphi(2,y,x)$, $x \geq 2$, $y \geq 1$

$\varphi(x,y)$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	…
1	1	$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	$2\cdot 4$	$2\cdot 5$	$2\cdot 6$	$2\cdot 7$	$2\cdot 8$	…
2	1	$2\uparrow 1$	$2\uparrow 2$	$2\uparrow 3$	$2\uparrow 4$	$2\uparrow 5$	$2\uparrow 6$	$2\uparrow 7$	$2\uparrow 8$	…
3	1	$2\uparrow^2 1$	$2\uparrow^2 2$	$2\uparrow^2 3$	$2\uparrow^2 4$	$2\uparrow^2 5$	$2\uparrow^2 6$	$2\uparrow^2 7$	$2\uparrow^2 8$	…
4	1	$2\uparrow^3 1$	$2\uparrow^3 2$	$2\uparrow^3 3$	$2\uparrow^3 4$	$2\uparrow^3 5$	$2\uparrow^3 6$	$2\uparrow^3 7$	$2\uparrow^3 8$	…
5	1	$2\uparrow^4 1$	$2\uparrow^4 2$	$2\uparrow^4 3$	$2\uparrow^4 4$	$2\uparrow^4 5$	$2\uparrow^4 6$	$2\uparrow^4 7$	$2\uparrow^4 8$	…
6	1	$2\uparrow^5 1$	$2\uparrow^5 2$	$2\uparrow^5 3$	$2\uparrow^5 4$	$2\uparrow^5 5$	$2\uparrow^5 6$	$2\uparrow^5 7$	$2\uparrow^5 8$	…
7	1	$2\uparrow^6 1$	$2\uparrow^6 2$	$2\uparrow^6 3$	$2\uparrow^6 4$	$2\uparrow^6 5$	$2\uparrow^6 6$	$2\uparrow^6 7$	$2\uparrow^6 8$	…
8	1	$2\uparrow^7 1$	$2\uparrow^7 2$	$2\uparrow^7 3$	$2\uparrow^7 4$	$2\uparrow^7 5$	$2\uparrow^7 6$	$2\uparrow^7 7$	$2\uparrow^7 8$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

CALCOLABILITÀ DELLA FUNZIONE $\psi(x,y)$

$$
\begin{aligned}
\psi(2,2) &= \psi(1, \psi(2,1)) \\
&= \psi(1, \psi(1, \underline{\psi(2,0)})) \\
&= \psi(1, \psi(1,1)) \\
&= \psi(1, \psi(0, \psi(1,0))) \\
&= \psi(1, \underline{\psi(0,1)}) \\
&= \psi(1,2) \\
&= \psi(0, \psi(1,1)) \\
&= \psi(0, \psi(0, \underline{\psi(1,0)})) \\
&= \psi(0, \underline{\psi(0,1)}) \\
&= \underline{\psi(0,2)} \\
&= 4
\end{aligned}
$$



STACK

ACKERMANN(x,y)

```
A:  if   x=0 OR y=0   then
         z := BASE_CASE_ACKERMANN(x,y)
         if   STACK_EMPTY()   then
              return (z)
         else
              w := pop()
              x := w
              y := z
              goto A
    else
         PUSH(x-1)
         y := y-1
         goto A
```

$\Big\}$ ACKERMANN(w,z)

$$\psi(x,y) = \psi(x-1, \psi(x, y-1))$$

$\Big\}$ ACKERMANN(x,y-1)

GESTIONE DELLO STACK

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \Longrightarrow \begin{cases} S = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n} \\ n \end{cases}$$

$\uparrow$
TOP

QUINDI INIZIALMENTE $\begin{cases} S = 1 \\ n = 0 \end{cases}$ STACK VUOTO

<u>STACK_EMPTY</u>$( ) \equiv \overline{sg}(n)$

<u>PUSH</u>(x)

$n := n + 1$

$S := S \cdot p_n^{x}$

<u>POP</u>$( )$

$z := (S)_n$

$S := S / p_n^{z}$

$n := n - 1$

<u>return</u> z

- PER INDUZIONE SU (x,y) (NELL'ORDINAMENTO LESSICOGRAFICO) SI PUO' DIMOSTRARE CHE IL PROGRAMMA ACKERMANN(x,y) CALCOLA CORRETTAMENTE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$

- PERTANTO LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ E' CALCOLABILE

- DIAMO ADESSO ALCUNI CENNI PER DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ NON E' PRIMITIVA RICORSIVA

LOOP PROGRAM

ISTRUZIONI: $Z(n)$, $S(n)$, $T(n,m)$

(*) LOOP(n)
    P
END

SIA k IL VALORE DEL REGISTRO R_n AL MOMENTO DELL'ESECUZIONE DI (*). SI ESEGUA IL PROGRAMMA P PER k VOLTE DI SEGUITO

- I LOOP PROGRAM SONO PARTICOLARI PROGRAMMI URM
- ESSI TERMINANO SEMPRE

GERARCHIA DEI LOOP PROGRAM

L : INSIEME DEI LOOP PROGRAM

L_n : INSIEME DEI LOOP PROGRAM CON PROFONDITÀ DI ANNIDAMENTO DELLE COPPIE LOOP-END MINORE O UGUALE A n

CHIARAMENTE $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$

$\mathcal{L}_n$: INSIEME DELLE FUNZIONI CALCOLABILI DA PROGRAMMI IN L_n

- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\mathcal{L}_n \subsetneq \mathcal{L}_{n+1}$, PER OGNI n.

TEOREMA $\quad PR = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

DIM (CENNI)

- LE FUNZIONI INIZIALI APPARTENGONO A $\mathcal{L}_0$
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ E' CHIUSO RISPETTO A COMPOSIZIONE E A RICORSIONE PRIMITIVA

PERTANTO $\quad PR \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

PER QUANTO RIGUARDA L'INCLUSIONE INVERSA, SI PUÒ PROCEDERE PER INDUZIONE SU n DIMOSTRANDO:

$$\mathcal{L}_0 \subseteq PR$$

$$\mathcal{L}_n \subseteq PR \longrightarrow \mathcal{L}_{n+1} \subseteq PR, \quad \text{PER OGNI } n$$

PERTANTO $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n \subseteq PR$, DA CUI IL TEOREMA ∎

COMPLESSITÀ

- SIA $P \in L$. PONIAMO:

$T_p(x_1, \dots, x_m)$ = NUMERO COMPLESSIVO DI ESECUZIONI DI ISTRUZIONI DEL TIPO Z, S, T NEL CORSO DELLA COMPUTAZIONE DI $P(x_1, \dots, x_m)$

VALE CHIARAMENTE IL SEGUENTE RISULTATO:

LEMMA $P \in L_n \longrightarrow T_p \in \mathcal{L}_m$

LEMMA A $\psi(x,y) \leq \psi(x+1,y)$, PER OGNI $x, y \geq 0$

LEMMA B $\psi(x,z)+z \leq \psi(x,z+1)$,

PER OGNI $x \geq 2$ E $z \geq 0$

LEMMA C PER OGNI $\bar{x}, \bar{k} \geq 0$ ASSEGNATI, SI HA

$$\psi(\bar{x}, y+\bar{k}) < \psi(\bar{x}+1, y)$$

PER OGNI y SUFFICIENTEMENTE GRANDE

BOUNDING THEOREM

SIA $P \in L_n$. ALLORA ESISTE k TALE CHE

$$T_p(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$$ $\blacksquare$

<u>NOTA</u>: VALE ANCHE IL SEGUENTE INVERSO DEL BOUNDING THEOREM.

<u>TEOREMA</u> SIA P UN LOOP PROGRAM CHE CALCOLA LA FUNZIONE $g(x_1, \dots, x_m)$, SE $T_p(x_1, \dots, x_m) \leq \psi(n, \max(x_1, \dots, x_m) + k)$, PER QUALCHE COSTANTE $n \geq 2$ E $k \geq 0$, ALLORA

$$g \in \mathcal{L}_n.$$ $\blacksquare$

IL BOUNDING THEOREM E IL

<u>LEMMA</u> B $\psi(x,z)+z \leq \psi(x,z+1)$,

PER OGNI $x \geq 2$ E $z \geq 0$

IMPLICANO LA SEGUENTE LIMITAZIONE SULLE FUNZIONI CALCOLATE DA PROGRAMMI IN L_n

LEMMA SIA $g(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{L}_n$. ALLORA ESISTE k TALE CHE

$$g(x_1,\dots,x_m) \leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+k).$$

DIM SIA $P \in L_n$ UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $g(x_1,\dots,x_m)$.

PER IL BOUNDING THEOREM,

$$T_P(x_1,\dots,x_m) \leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h)$$

PER QUALCHE COSTANTE h. MA

$$\begin{aligned} g(x_1,\dots,x_m) &\leq T_P(x_1,\dots,x_m) + \max(x_1,\dots,x_m) \\ &\leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h) + \max(x_1,\dots,x_m) \\ &\leq \psi(n, \max(x_1,\dots,x_m)+h+1), \end{aligned}$$

DA CUI IL LEMMA. ∎

- DIMOSTRIAMO ADESSO CHE LA FUNZIONE $\psi(x,x)$ NON E' PRIMITIVA RICORSIVA (E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, ANCHE LA FUNZIONE $\psi(x,y)$ NON PUÒ ESSERE PRIMITIVA RICORSIVA)

TEOREMA $\psi(x,x) \notin PR$.

DIM. SE $\psi(x,x) \in PR$, POICHE' $PR = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$

SI AVREBBE $\psi(x,x) \in \mathcal{L}_n$, PER QUALCHE n,

QUINDI IL LEMMA PRECEDENTE IMPLICA CHE PER QUALCHE k

$$\psi(x,x) \leq \psi(n, x+k) \quad \text{(PER OGNI } x\text{)}.$$

MA PER IL LEMMA C VALE $\psi(n,x+k) < \psi(n+1,x)$,

SIA PURE SOLO PER x SUFFICIENTEMENTE GRANDI.

PERTANTO ESISTE $n_0 > n+1$ TALE CHE:

$$\psi(n_0,n_0) \leq \psi(n, n_0+k) < \psi(n+1,n_0) \underset{\Uparrow}{\leq} \psi(n_0,n_0).$$

LEMMA A

ASSURDO!

PERTANTO $\psi(x,x) \notin PR$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE. $\blacksquare$