

## UNLIMITED REGISTER MACHINES (URM) (MACCHINE A REGISTRI ILLIMITATI)

- SI TRATTA DI UNA VARIANTE DELLE MACCHINE DI SHEPHERDSON & STURGIS [1963]
- UNA URM È DOTATA DI UN ARRAY INFINITO DI REGISTRI  $R_1, R_2, R_3, \dots$  CIASCUNO DEI QUALI CONTIENE UN NUMERO NATURALE (INTERO NON NEGATIVO)  $r_1, r_2, r_3, \dots$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_7$	...
$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	...

- LO STATO DI UNA URM È IL CONTENUTO DEI SUOI REGISTRI:  $\vec{r} \in \mathbb{N}^{\infty}$

- LO STATO DI UNA URM PUO' ESSERE MODIFICATO DALL'ESECUZIONE DI UN URM-PROGRAMMA
  - UN URM-PROGRAMMA E' UNA SEQUENZA FINITA  $I_1, I_2, \dots, I_s$  DI ISTRUZIONI DI UNO DEI SEGUENTI QUATTRO TIPI:
    - RESET
    - INCREMENTO
    - (ASSEGNAIMENTO)
    - SALTO CONDIZIONATO
- ( $s$  E' LA LUNGHEZZA DEL PROGRAMMA)

- UNA CONFIGURAZIONE ISTANTANEA È UNA COPPIA  $(k, \vec{r}) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^\infty$  CON
- $k$  INTERO POSITIVO, DETTO CONTATORE DI PROGRAMMA
  - $\vec{r}$  STATO
- (INFORMALMENTE,  $k$  RAPPRESENTA L'INDICE DELLA ISTRUZIONE CHE STA PER ESSERE ESEGUITA QUANDO LO STATO DEI REGISTRI È  $\vec{r}$ )

### ESEMPIO

$(5, (1, 0, 0, \dots))$  È UNA CONFIGURAZIONE ISTANTANEA

### ISTRUZIONI DI RESET

$Z(m)$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )

$[R_m \leftarrow 0]$

SEMANTICA:  $(k, \vec{r}) \xrightarrow{Z(m)} (k+1, \vec{r}')$  con  $r'_i = \begin{cases} r_i, & i \neq m \\ 0, & i = m \end{cases}$

### ESEMPIO

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
9	6	5	23	7	0	...

$\downarrow Z(3)$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
9	6	0	23	7	0	...

### ISTRUZIONI DI INCREMENTO

$S(m)$  ( $m \in \mathbb{N}^+$ )  $[R_m \leftarrow R_m + 1]$

SEMANTICA:  $(k, \vec{r}) \xrightarrow{S(m)} (k+1, \vec{r}')$  con  $r'_i = \begin{cases} r_i, & i \neq m \\ r_m + 1, & i = m \end{cases}$

### ESEMPIO

$k=5$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
9	6	0	23	7	0	...

$\downarrow S(5)$

$k=6$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
9	6	0	23	8	0	...

ISTRUZIONI DI ASSEGNAMENTO

$T(m, n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}^+$ ) [ $R_m \leftarrow R_m$ ]

SEMANTICA:  $(k, \vec{r}) \xrightarrow{T(m, n)} (k+1, \vec{r}')$  con  $r'_i = \begin{cases} r_i, & i \neq m \\ r_m, & i = m \end{cases}$

ESEMPIO

$k=5$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
9	6	0	23	8	0	...

$\downarrow T(5, 1)$

$k=6$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
8	6	0	23	8	0	...

ISTRUZIONI DI SALTO CONDIZIONATO

$J(m, m, q)$  ( $m, m, q \in \mathbb{N}^+$ ) [if  $R_m = R_m$  then goto  $q$ ]

SEMANTICA:  $(k, \vec{r}) \xrightarrow{J(m, m, q)} (k', \vec{r})$  con  $k' = \begin{cases} q, & r_m = r_m \\ k+1, & r_m \neq r_m \end{cases}$

ESEMPIO

$k=5$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
8	6	0	23	8	0	...

$\downarrow J(5, 1, 9)$

$k'=9$

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	...
8	6	0	23	8	0	...

## COMPUTAZIONI

- DATI

- $P = I_1, I_2, \dots, I_s$  (PROGRAMMA DI LUNGHEZZA  $s$ )
- $\vec{r}$  (STATO DEI REGISTRI)

LA COMPUTAZIONE  $P(\vec{r})$  DI  $P$  A PARTIRE  
DALLO STATO INIZIALE  $\vec{r}$  È LA SEQUENZA  
(FINITA O INFINITA) DI CONFIGURAZIONI  
ISTANTANEE

$(k_1, \vec{r}^{(1)}) , (k_2, \vec{r}^{(2)}) , (k_3, \vec{r}^{(3)}) , \dots$

TALE CHE



## COMPUTAZIONI (CONTINUA)

- $k_1 = 1$ ,  $\vec{r}^{(1)} = \vec{r}$   
(CIOÈ LA COMPUTAZIONE INIZIA CON LA PRIMA ISTRUZIONE DI  $P$  E CON LO STATO INIZIALE  $\vec{r}$ )
- SE  $(k_i, \vec{r}^{(i)})$  È L'  $i$ -ESIMA CONFIGURAZIONE ISTANTANEA DELLA COMPUTAZIONE  $P(\vec{r})$  ALLORA
  - ▲ SE  $k_i \leq s$ ,  $(k_i, \vec{r}^{(i)})$  HA SUCCESSORE IN  $P(\vec{r})$   
E SI HA  $(k_i, \vec{r}^{(i)}) \xrightarrow{I_{k_i}} (k_{i+1}, \vec{r}^{(i+1)})$
  - ▲ SE  $k_i > s$ ,  $(k_i, \vec{r}^{(i)})$  NON HA SUCCESSORE IN  $P(\vec{r})$  (CIOÈ  $(k_i, \vec{r}^{(i)})$  È LA CONFIGURAZIONE FINALE DI  $P(\vec{r})$ )

## ESEMPIO

$I_1: J(1,2,6)$

$I_2: S(2)$

$I_3: S(3)$

$I_4: J(1,2,6)$

$I_5: J(1,1,2)$

$I_6: T(3,1)$

if  $R_1 = R_2$  then goto 6

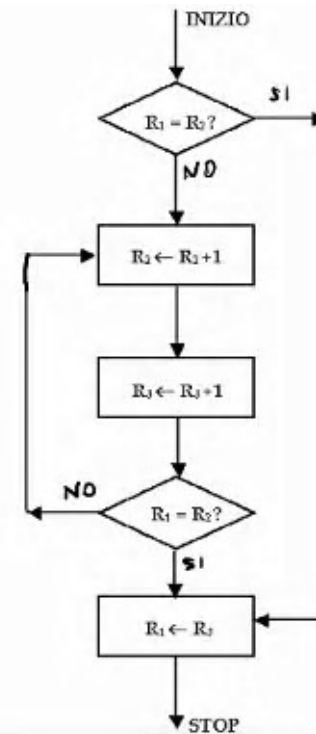
[2]  $R_2 \leftarrow R_2 + 1$

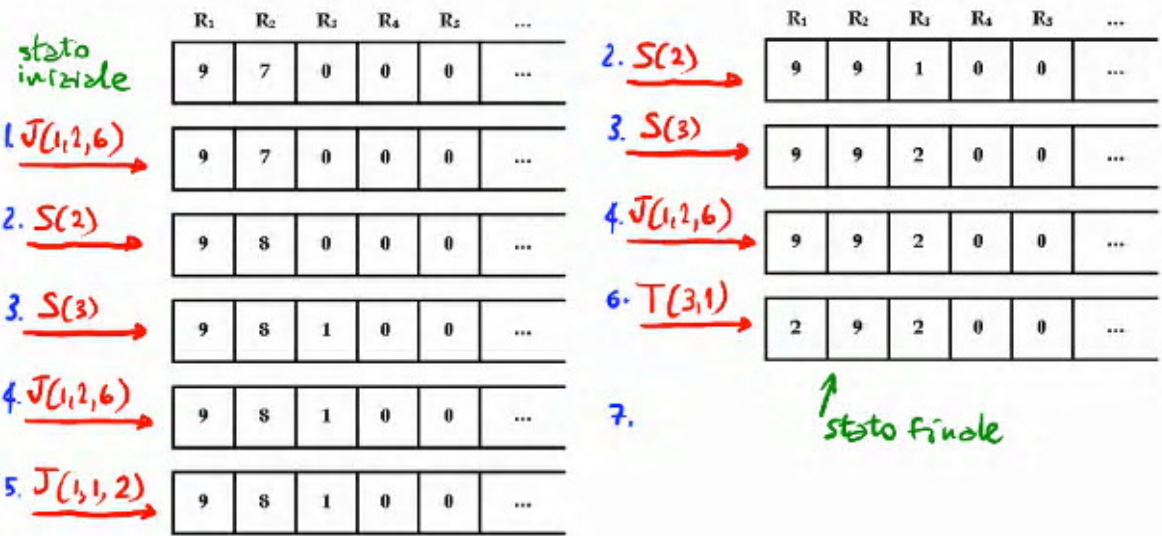
$R_3 \leftarrow R_3 + 1$

if  $R_1 = R_2$  then goto 6

if  $R_1 = R_3$  then goto 2

[6]  $R_1 \leftarrow R_3$





-SI TRATTA DI UNA COMPUTAZIONE FINITA O TERMINANTE

	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	...
stato iniziale	6	7	0	0	0	...
1. $J(1,2,6)$	6	7	0	0	0	...
2. $S(2)$	6	8	0	0	0	...
3. $S(3)$	6	8	1	0	0	...
4. $J(1,2,6)$	6	8	1	0	0	...
5. $J(1,1,2)$	6	8	1	0	0	...

	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	...
2. $S(2)$	6	9	1	0	0	...
3. $S(3)$	6	9	2	0	0	...
4. $J(1,2,6)$	6	9	2	0	0	...
5. $J(1,1,2)$	6	9	2	0	0	...
2. $S(2)$	6	10	2	0	0	...
3. $S(3)$	6	10	3	0	0	...

...

- SI DIMOSTRA CHE TALE COMPUTAZIONE E' INFINITA CIOE' NON TERMINANTE

### ALCUNE NOTAZIONI UTILI

- SIA  $P$  UN PROGRAMMA ED  $\vec{r}$  UNO STATO (INIZIALE) DEI REGISTRI.
- SE LA COMPUTAZIONE  $P(\vec{r})$  E' TERMINANTE SCRIVEREMO  $P(\vec{r}) \downarrow$
- SE LA COMPUTAZIONE  $P(\vec{r})$  E' NON TERMINANTE SCRIVEREMO  $P(\vec{r}) \uparrow$
- CON LA NOTAZIONE  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  INDICHEREMO LA COMPUTAZIONE  $P(\vec{r})$  DOVE

$$r_i = \begin{cases} a_i & \text{SE } i \leq n \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

## CONVENZIONI DI INPUT E OUTPUT

- SIA  $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \downarrow$ .  
L'OUTPUT DI  $P$  SU INPUT  $a_1, a_2, \dots, a_n$  E' IL CONTENUTO DEL REGISTRO  $R_1$  NELLO STATO FINALE DELLA COMPUTAZIONE  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .
- SCRIVEREMO  $P(a_1, a_2, \dots, a_n) \downarrow b$  PER INDICARE CHE  $b$  E' L'OUTPUT DELLA COMPUTAZIONE  $P(a_1, \dots, a_n)$

- SIA  $f: A \rightarrow B$  UNA FUNZIONE PARZIALE  
TALE CIOE' CHE  $\text{Dom}(f) \subseteq A$

- SE  $f$  E' DEFINITA SU  $a$  SCRIVEREMO  $f(a) \downarrow$   
ALTRIMENTI SCRIVEREMO  $f(a) \uparrow$

- SIANO  $f, g: A \rightarrow B$  FUNZIONI PARZIALI,  
SCRIVEREMO  $f \simeq g$  PER INDICARE CHE

1) PER OGNI  $a \in A$  :  $f(a) \downarrow$  SE E SOLO SE  $g(a) \downarrow$

2) PER OGNI  $a \in A$  : SE  $f(a) \downarrow$  ALLORA  $f(a) = g(a)$

- SIA  $P$  UN PROGRAMMA.

- PER OGNI  $n \geq 1$  PONIAMO

$$f_P^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} b & \text{SE } P(a_1, a_2, \dots, a_n) \downarrow b \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- LA FUNZIONE (PARZIALE)  $f_P^{(n)}: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  E' LA FUNZIONE  $n$ -ARIA CALCOLATA DA  $P$

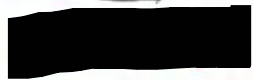
- UNA FUNZIONE PARZIALE  $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  SI DICE URM-CALCOLABILE SE ESISTE UN PROGRAMMA URM  $P$  TALE CHE  $g \approx f_P^{(n)}$



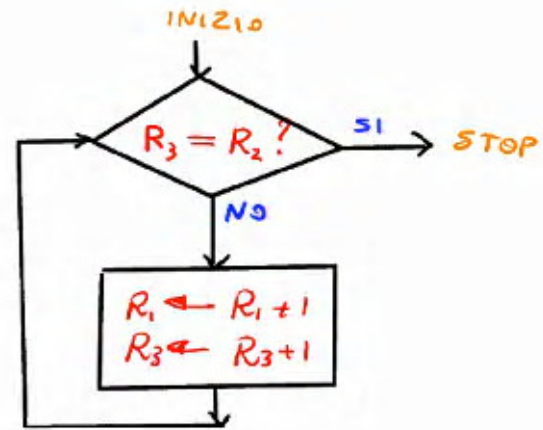
- INDICHEREMO CON  $\mathcal{C}$  LA COLLEZIONE DI TUTTE LE FUNZIONI URM-CALCOLABILI (DI QUALUNQUE ARIETA')
- INDICHEREMO CON  $\mathcal{C}_n$  LA COLLEZIONE DI TUTTE LE FUNZIONI  $n$ -ARIE URM-CALCOLABILI
- PERTANTO VALE

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

## ESEMPLI



- $I_1$   $J(3, 2, 5)$
- $I_2$   $S(1)$
- $I_3$   $S(3)$
- $I_4$   $J(1, 1, 1)$



- E' FACILE VERIFICARE CHE IL PROGRAMMA

$I_1 : J(1,2,6)$

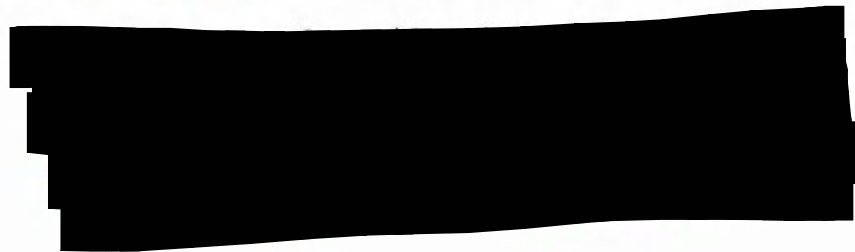
$I_2 : S(2)$

$I_3 : S(3)$

$I_4 : J(1,2,6)$

$I_5 : J(1,1,2)$

$I_6 : T(3,1)$



## ALCUNI ESEMPI

- SI CONSIDERI LA FUNZIONE  $x+y$
- IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA  $x+y$

1:  $J(2,3,5)$

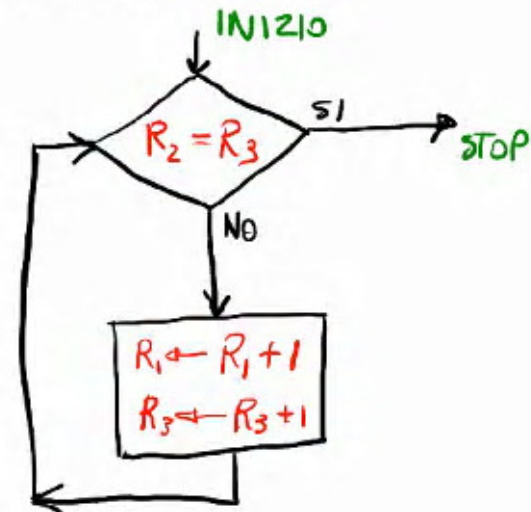
2:  $S(1)$

3:  $S(3)$

4:  $J(1,1,1)$

STATO TIPICO

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	
$x+k$	$y$	$k$	$0$	$0$	...



- SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x-1 & \text{SE } x \geq 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

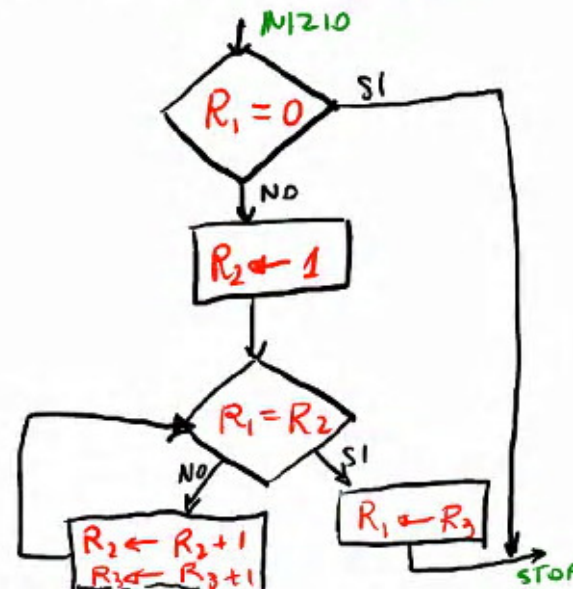
- IL SEGUENTE PROGRAMMA

CALCOLA  $x \dot{-} 1$

- 1:  $J(1, 2, 8)$
- 2:  $S(2)$
- 3:  $J(1, 2, 7)$
- 4:  $S(2)$
- 5:  $S(3)$
- 6:  $J(1, 1, 3)$
- 7:  $T(3, 1)$

STATO TIPICO

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	
$x$	$k+1$	$k$	0	0	...

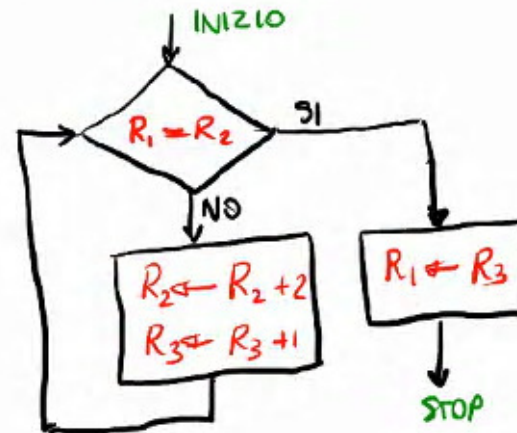


- SI CONSIDERI LA FUNZIONE  $f(x) = \begin{cases} 1/2x & \text{SE } x \text{ E' PARI} \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$
- IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA  $f$

- 1: J(1,2,6)
- 2: S(2)
- 3: S(2)
- 4: S(3)
- 5: J(1,1,1)
- 6: T(3,1)

STATO TIPICO

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	...
$x$	$2k$	$k$	$0$	$0$	...



# ESERCIZI

1. SI DIMOSTRI CHE LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI ESIBENDO OPPORTUNI PROGRAMMI URM

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x = 0 \\ 1 & \text{SE } x \neq 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = 5$$

$$(c) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x = y \\ 1 & \text{SE } x \neq y \end{cases}$$

$$(d) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \leq y \\ 1 & \text{SE } x > y \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{SE } x \text{ E' UN MULTIPLO DI } 3 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$(f) f(x) = \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor$$

2. SIA  $P$  UN PROGRAMMA URM CHE NON CONTIENE ALCUNA ISTRUZIONE DEL TIPO  $J(m, m, P)$ .  
SI DIMOSTRI CHE ESISTE  $m \in \mathbb{N}$  TALE CHE:

$$- f_p^{(1)}(x) = m \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad \text{OPPURE}$$

$$- f_p^{(1)}(x) = x + m \quad \forall x \in \mathbb{N},$$



3. DATO UN PROGRAMMA URM  $P$  SI DIMOSTRI CHE  
ESISTE UN ALTRO PROGRAMMA URM  $P'$  TALE CHE

-  $P'$  NON CONTIENE ALCUNA ISTRUZIONE  
DEL TIPO  $T(m, m)$

$$- f_P^{(m)}(\vec{x}) = f_{P'}^{(m)}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^m$$