Computabilità

C.d.S. magistrale in Matematica

Prof. Domenico Cantone

A.A. 2017/18

PROGRAMMA

I PARTE: TEORIA DELLA CALCOLABILITA'

FUNZIONI CALCOLABILI

- ALGORITMI, PROCEDURE EFFETTIVE
- IL MODELLO URM (UNLIMITED REGISTER MACHINE)
- FUNZIONI URM-CALCOLABILI
- PREDICATI E PROBLEMI DECIDIBILI
- CALCOLABILITA' SU ALTRI DOMINI

GENERAZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI

- FUNZIONI CALCOLABILI DI BASE
- UNIONE DI PROGRAMMI
- SOSTITUZIONE
- RICORSIONE
- MINIMALIZZAZIONE

TESI DI CHURCH

- ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITÀ
- FUNZIONI PARZIALMENTE RICORSIVE
- FUNZIONI PRIMITIVE RICORSIVE
- MACCHINE DI TURING
- (SISTEMI DI POST E MARKOV)
- TESI DI CHURCH-TURING

ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI CALCOLABILI
E I PROGRAMMI UNIVERSALI

- IL METODO DIAGONALE
- IL TEOREMA S-m-n
- FUNZIONI E PROGRAMMI UNIVERSALI
- DUE APPLICAZIONI DEL PROGRAMMA UNIVERSALE
- PROBLEMI INDECIDIBILI
- TEOREMA DI RICORSIONE

LIBRO DI TESTO:

N.J. CUTLAND: "COMPUTABILITY",
CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1986.

PERSONAGGI E IDEE CHE HANNO CONTRIBUITO ALLA NASCITA DELLA COMPUTABILITA' COME DISCIPLINA

(E DEL CALCOLATORE UNIVERSALE)

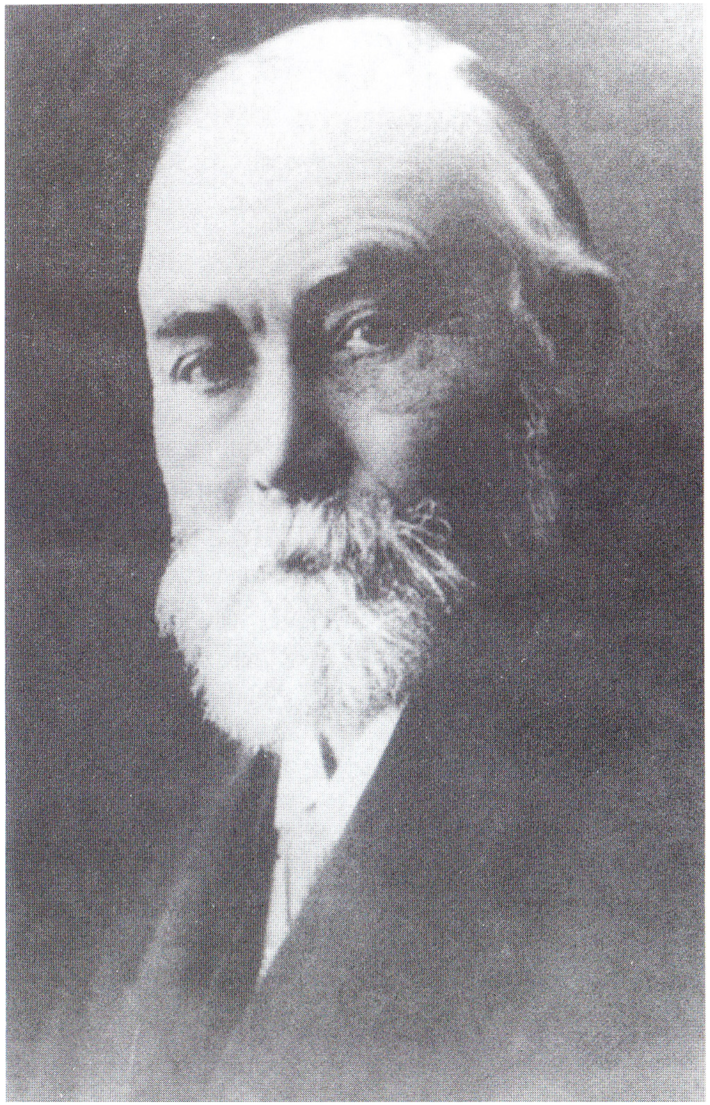
GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ
(LIPSIA 1646 - HANNOVER 1716)

- SOGNO DI LEIBNIZ
- LA CARATTERISTICA UNIVERSALE
- IL CALCULUS RATIOCINATOR
- RUOTA DI LEIBNIZ
- NOTAZIONE
- MINIERE DELLO HARZ

GEORGE BOOLE

(1815 - 1864)

ALGEBRIZZAZIONE DELLA LOGICA (PROPOSIZIONALE)

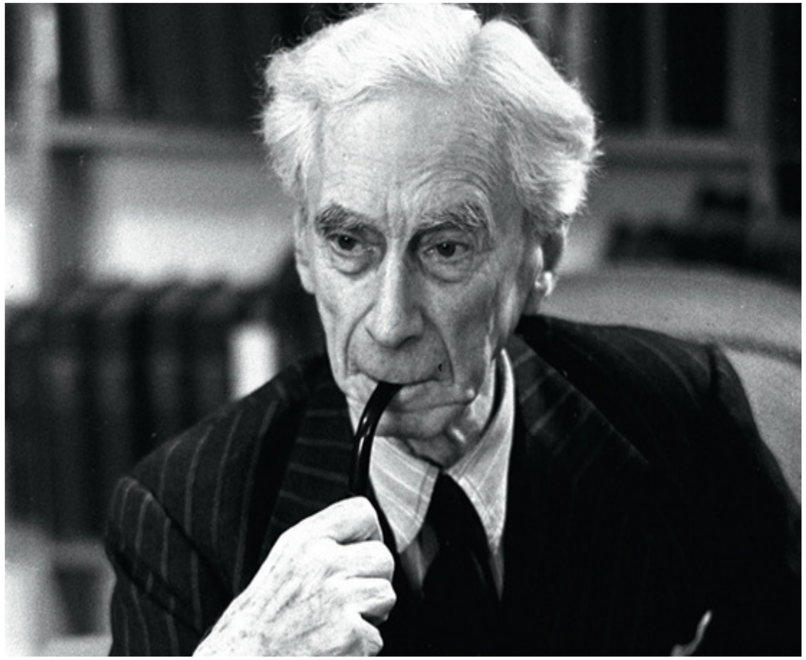


FRIEDRIC LUDWIG GOTTLOB FREGE

(WISMAR 1848 - BAD KLEINEN 1925)

- IDEOGRAFIA
- LOGICISMO
- ANTINOMIA DI ...

PARADOSSO DI RUSSELL



SIA $U = \{x : x \notin x\}$.

$U \in U$?

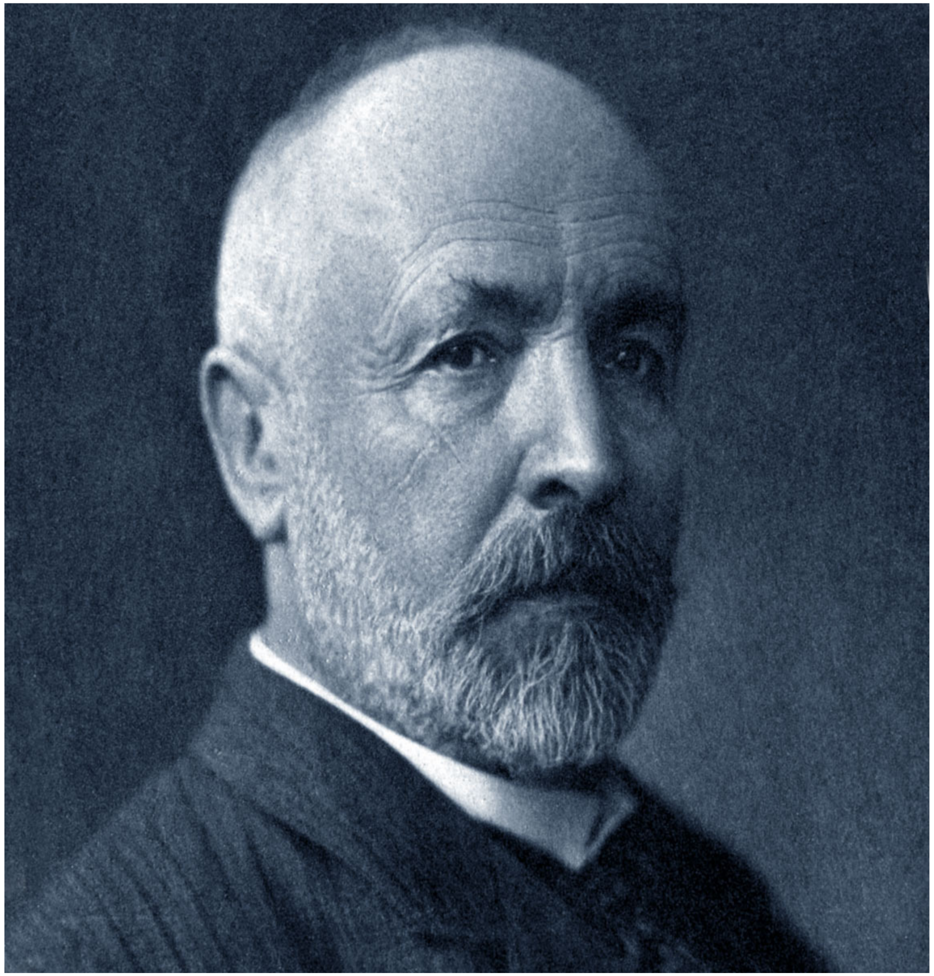
$U \in U \rightarrow U \notin U$

$U \notin U \rightarrow U \in U$

BERTRAND ARTHUR WILLIAM RUSSELL

(1872 - 1970)

DIAGONALIZZAZIONE



GEORG CANTOR

(SAN PIETROBURGO 1845 - HALLE 1918)

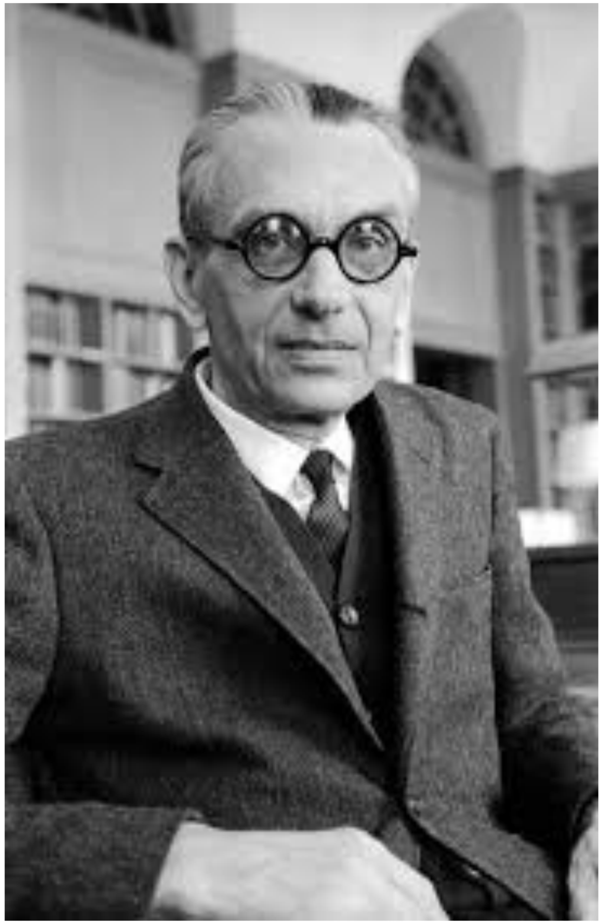
DAVID HILBERT
(1862 – 1943)

- FORMALISMO
- PROBLEMI
- PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA LOGICA
- NON ESISTONO "IGNORABIMUS" IN MATEMATICA

WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN

[DOBBIAMO SAPERE / SAPREMO]

TEOREMI DI INCOMPLETEZZA



KURT GÖDEL

(BRNO 1906 - PRINCETON 1978)

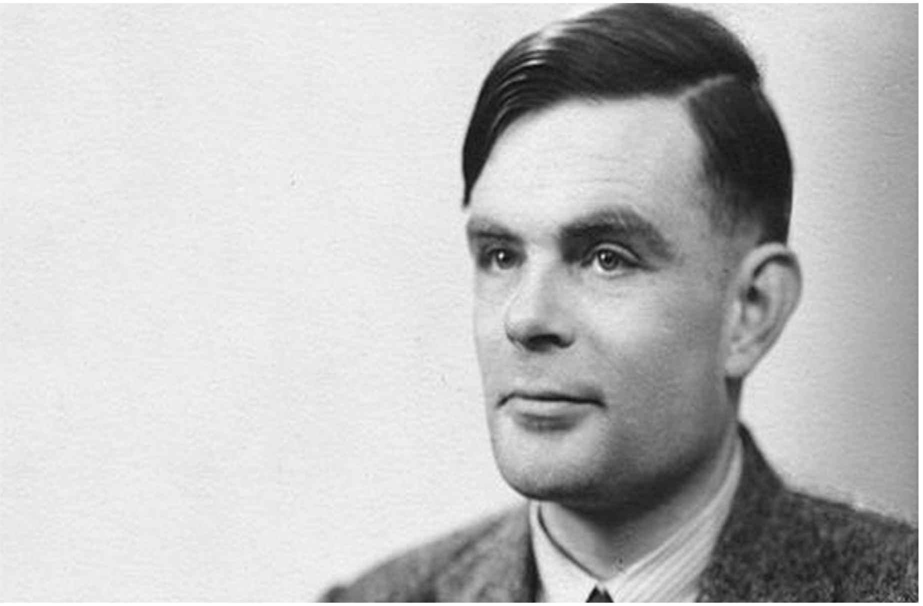
- INDECIDIBILITÀ DELL'ARITMETICA

(λ-CALCOLO)

ALONZO CHURCH
(WASHINGTON 1903 - HUDSON 1955)

INDECIDIBILITA' DELL'ARITMETICA

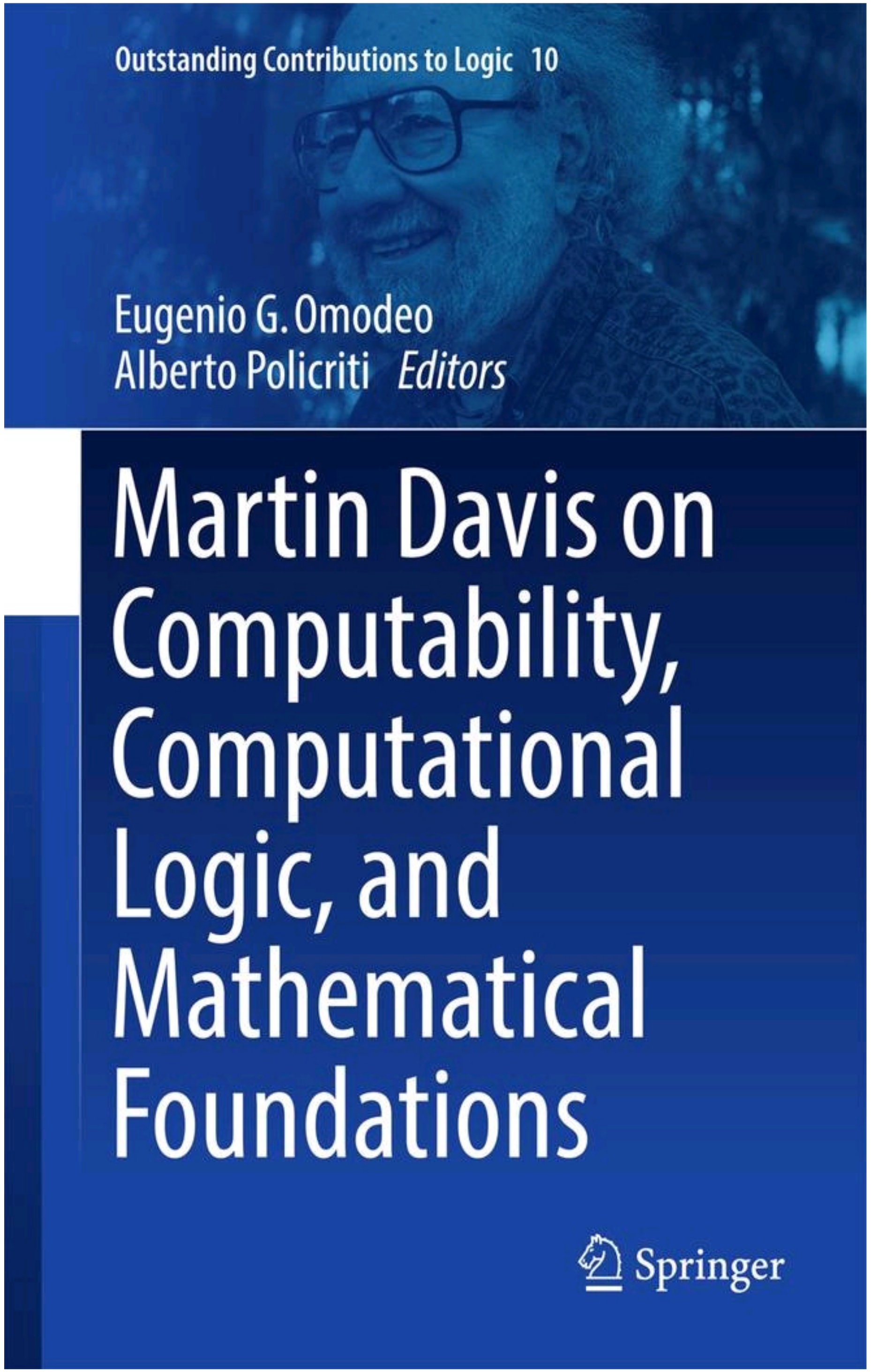
(MACCHINE DI TURING)



ALAN TURING

(LONDRA 1912 - WILMSLOW 1954)

MARTIN DAVIS
(1928)



GÖDEL E EINSTEIN A PRINCETON

TEORIA DELLA CALCOLABILITÀ

CENNI STORICI:

NASCE CON I LAVORI DI ALAN TURING E ALONZO CHURCH CHE INTORNO AL 1936 HANNO DATO UNA SOLUZIONE NEGATIVA AL PROBLEMA DELLA DECISIONE PER LA LOGICA DEL I ORDINE CONSIDERATO DA DAVID HILBERT TRA I PROBLEMI PIÙ IMPORTANTI DEL SUO TEMPO

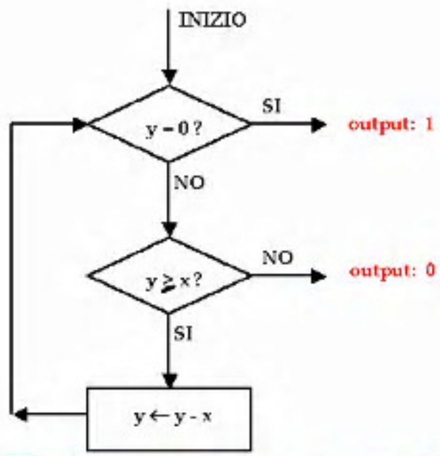
- PER RISOLVERE IN POSITIVO UN PROBLEMA ALGORITMICO E' SUFFICIENTE ESIBIRE UNA PROCEDURA IN UN FORMALISMO ACCETTABILE.

ES.
- ALGORITMO DI EUCLIDE
- ALGORITMI PER LE 4 OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI
- ALGORITMO DI FATTORIZZAZIONE
- CRIVELLO DI ERATOSTENE
- TEST DI DIVISIBILITA'

...

ESEMPIO: TEST DI DIVISIBILITÀ: y È DIVISIBILE PER z?

FORMALISMO: DIAGRAMMI DI FLUSSO $\boxed{\exists z : \ y = xz ?}$



- SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:
  - IL PROCESSO DI CALCOLO TERMINA SEMPRE
  - SE L'OUTPUT È 1 E L'ASSEGNAMENTO $y \leftarrow y - x$ È ESEGUITO z VOLTE, ALLORA VALE $y = z \cdot x$
  - SE L'OUTPUT È 0 ALLORA y NON È DIVISIBILE PER x

QUINDI IL TEST DI DIVISIBILITÀ È COMPUTABILE

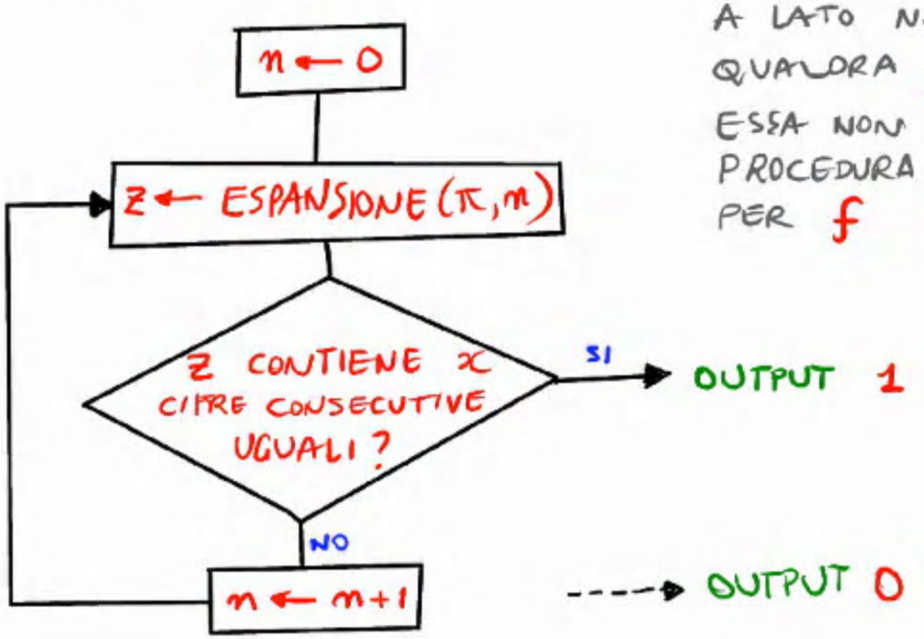
ESEMPIO

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ESPANSIONE DECIMALE DI } \pi \text{ CONTIENE} \\ & \text{ESATTAMENTE } x \text{ CIFRE CONSECUTIVE EGUALI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

PUR DISPONENDO DI UNA PROCEDURA FINITA CHE PER OGNI n CALCOLA L'ESPANSIONE DI π CON n CIFRE DECIMALI, ALLO STATO ATTUALE DELLE CONOSCENZE NON SI DISPONE DI UN PROCESSO DI CALCOLO PER f.

ESEMPIO (CONTINUA)



- POICHE' LA PROCEDURA A LATO NON SI FERMA QUALORA $f(x)=0$, ESSA NON E' UNA PROCEDURA DI CALCOLO PER f

- PER RISOLVERE IN NEGATIVO UN PROBLEMA ALGORITMICO E' NECESSARIO AVERE UN'IDEA CHIARA DI TUTTI I POSSIBILI ALGORITMI E QUINDI FARE VEDERE CHE CIASCUNO DI ESSI NON E' IN GRADO DI RISOLVERE IL PROBLEMA IN ESAME

- OCCORRE QUINDI FORMALIZZARE IL CONCETTO INTUITIVO DI ALGORITMO:

  SEQUENZA DI ISTRUZIONI CIASCUNA DELLE QUALI PUO' ESSERE ESEGUITA IN MANIERA NON AMBIGUA ED EFFETTIVA DA UN'OPPORTUNA MACCHINA

- IL PROBLEMA DIVENTA ALLORA QUELLO DI FORMALIZZARE UN OPPORTUNO MODELLO DI CALCOLO UNIVERSALE (MACCHINA)
- SONO STATI PROPOSTI PARECCHI MODELLI:
  - MACCHINE DI TURING (TURING, 1936)
  - λ-CALCOLO (CHURCH, 1936)
  - FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE (GÖDEL - KLEENE, 1936)
  - SISTEMI DEDUTTIVI CANONICI (POST, 1945)
  - SISTEMI DI MARKOV (MARKOV, 1951)
  - MACCHINE A REGISTRI ILLIMITATI (URM) (SHEPERDSON & STURGIS, 1936)

- CIASCUNO DI TALI SISTEMI DÀ LUOGO AD UNA DEFINIZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI (OVVERO DI PROBLEMI RISOLVIBILI IN MANIERA EFFETTIVA)
- È INTERESSANTE OSSERVARE CHE TUTTI I SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO DEFINISCONO LA MEDESIMA CLASSE DI FUNZIONI CALCOLABILI

TESI DI CHURCH-TURING

UNA FUNZIONE È CALCOLABILE SE E SOLO SE È CALCOLABILE IN UNO DEI SUDDETTI MODELLI DI CALCOLO.