ANALISI DI TURING DELLA CALCOLABILITÀ

- ALAN TURING, ANALIZZANDO IL PROCESSO DI CALCOLO EFFETTIVO CONCLUSE CHE ESSO PUÒ ESSERE CONSIDERATO UNA SEQUENZA DI OPERAZIONI ELEMENTARI DEI SEGUENTI TIPI
  - SCRITTURA DI UN SIMBOLO
  - CANCELLAZIONE DI UN SIMBOLO
  - TRASFERIMENTO DELL'ATTENZIONE DA UN SIMBOLO AD UN ALTRO

ANALISI DI TURING DELLA CALCOLABILITÀ 2

LA SCELTA DELL'OPERAZIONE DA ESEGUIRE AL PASSO SUCCESSIVO DIPENDE SOLTANTO DA

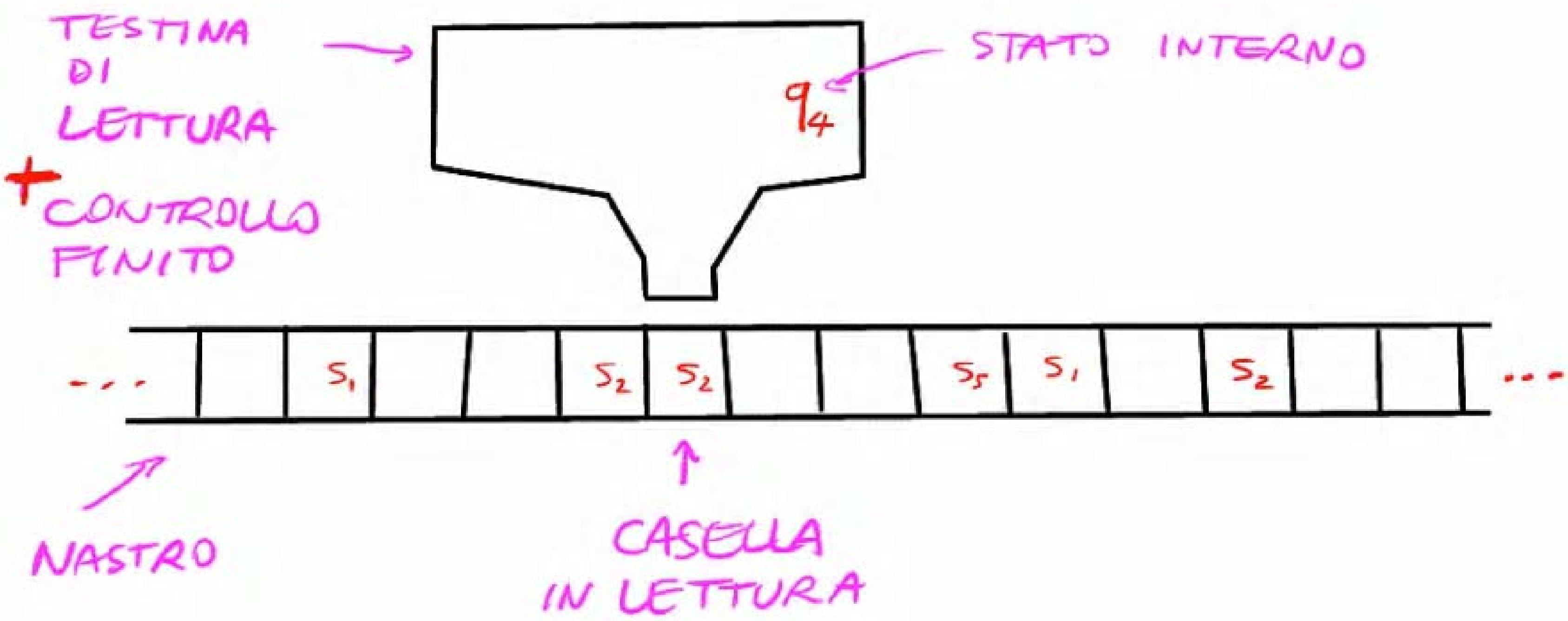
- SIMBOLO CHE SI STA LEGGENDO
- STATO CORRENTE

INOLTRE SI SUPPONE CHE SIA IL NUMERO DI SIMBOLI, SIA IL NUMERO DEGLI STATI SIANO FINITI, IN QUANTO LE CAPACITÀ DI UN ESECUTORE SONO FINITE

MACCHINE DI TURING

HARDWARE

- NASTRO INFINITO SUDDIVISO IN CASELLE CIASCUNA DELLE QUALI PUO' CONTENERE UN SINGOLO SIMBOLO TRATTO DA UNA LISTA FINITA DI SIMBOLI $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ DETTA ALFABETO DELLA MACCHINA, DOVE s_0 E' IL BLANK
- TESTINA DI LETTURA/SCRITTURA
- UNITA' DI CONTROLLO SPECIFICATA DA UN INSIEME FINITO DI QUADRUPLE


TESTINA DI LETTURA
+ CONTROLLO FINITO
STATO INTERNO
q4
...
S1
S2
S2
S5
S1
S2
...
NASTRO
CASELLA IN LETTURA

OPERAZIONI ELEMENTARI AMMESSE

- CANCELLARE IL SIMBOLO IN LETTURA E SOSTITUIRLO CON UN ALTRO SIMBOLO DELL'ALFABETO
- SPOSTARE LA TESTINA DI UNA POSIZIONE A SINISTRA
- SPOSTARE LA TESTINA DI UNA POSIZIONE A DESTRA
- CAMBIARE LO STATO INTERNO DELLA MACCHINA SCEGLIENDO DA UNA LISTA FINITA $q_1, q_2, \ldots, q_m$ DETTA INSIEME DEGLI STATI INTERNI DELLA MACCHINA IN BASE ALLE SPECIFICHE DELLA MACCHINA

- UNA MACCHINA M CON ALFABETO $\{s_1, \ldots, s_n\}$ ED INSIEME DI STATI $\{q_1, \ldots, q_m\}$ E' SPECIFICATA DA UN INSIEME FINITO DI QUADRUPLE DEL TIPO

$$q_i \, s_j \, s_k \, q_l$$

$$q_i \, s_j \, R \, q_l$$

$$q_i \, s_j \, L \, q_l$$

CON $0 \leq j, k \leq n$, $1 \leq i, l \leq m$

ED $R, L \notin \{s_0, s_1, \ldots, s_k\} \cup \{q_1, \ldots, q_m\}$.

- SUPPORREMO CHE PER OGNI q_i E s_j, LA MACCHINA M POSSIEDA AL PIÙ UNA QUADRUPLA CHE INIZIA CON $q_i s_j$

(DETERMINISMO)

AZIONE SPECIFICATA DALLA QUADRUPLA $q_i s_j \alpha q_l$ SU UNA MACCHINA DI TURING M CHE

- SI TROVA NELLO STATO q_i
- SCANDISCE IL SIMBOLO s_j

---

1. $\alpha = s_k \Longrightarrow$ SOSTITUISCE s_k AL POSTO DI s_j

   $\alpha = R \Longrightarrow$ SPOSTA LA TESTINA DI LETTURA A DESTRA

   $\alpha = L \Longrightarrow$ SPOSTA LA TESTINA DI LETTURA A SINISTRA

2. PASSA NELLO STATO INTERNO q_l

- IN GENERALE UNA COMPUTAZIONE DI UNA MACCHINA DI TURING A PARTIRE DA UNA CONFIGURAZIONE INIZIALE (NASTRO + POSIZIONE TESTINA + STATO INIZIALE) E' SPECIFICATA COME SEGUE:

- SINO A QUANDO ESISTE UNA QUADRUPLA DEL TIPO $q_i\, s_j\, \alpha\, q_l$, DOVE
  - q_i E' LO STATO INTERNO CORRENTE
  - s_j E' IL SIMBOLO SCANDITO

  SI ESEGUA L'AZIONE SPECIFICATA DALLA QUADRUPLA (SI NOTI CHE SE ESISTE, TALE QUADRUPLA E' UNICA)
- ALTRIMENTI LA COMPUTAZIONE SI FERMA

ESEMPIO

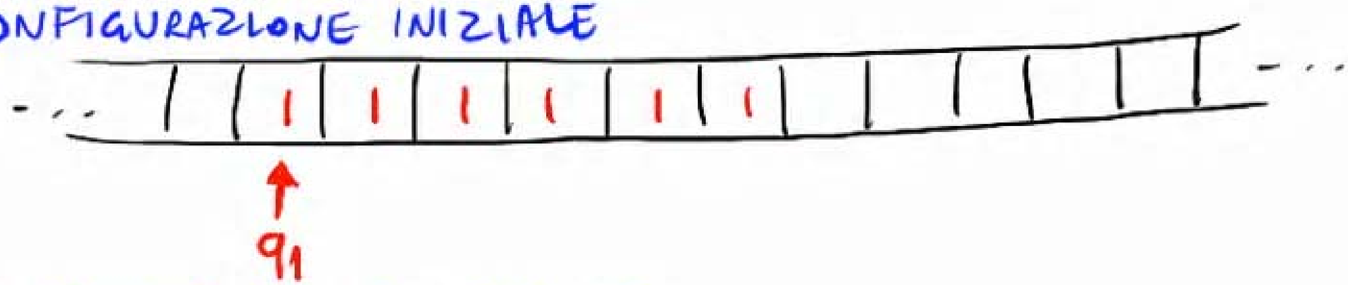
$M:$ $q_1\ 0\ R\ q_1$
$q_1\ 1\ 0\ q_2$
$q_2\ 0\ R\ q_2$
$q_2\ 1\ R\ q_1$

ALFABETO DI $M = \{0, 1\}$

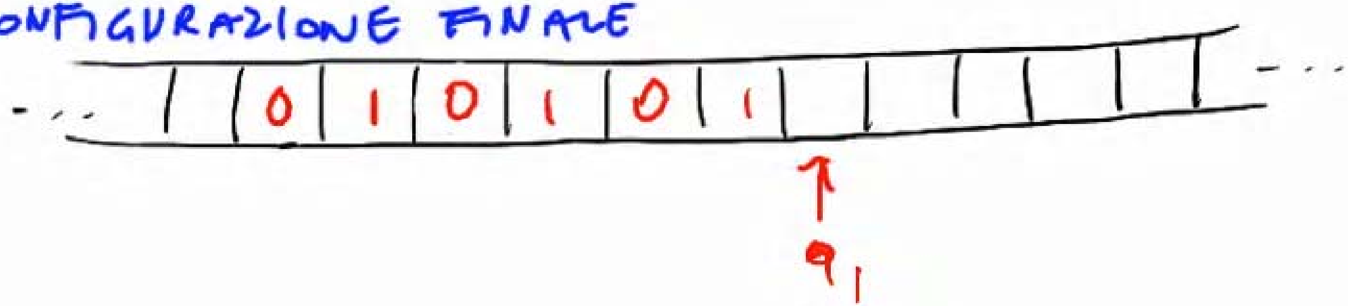
STATI DI $M = \{q_1, q_2\}$

STATO INIZIALE $= q_1$

CONFIGURAZIONE INIZIALE



CONFIGURAZIONE FINALE

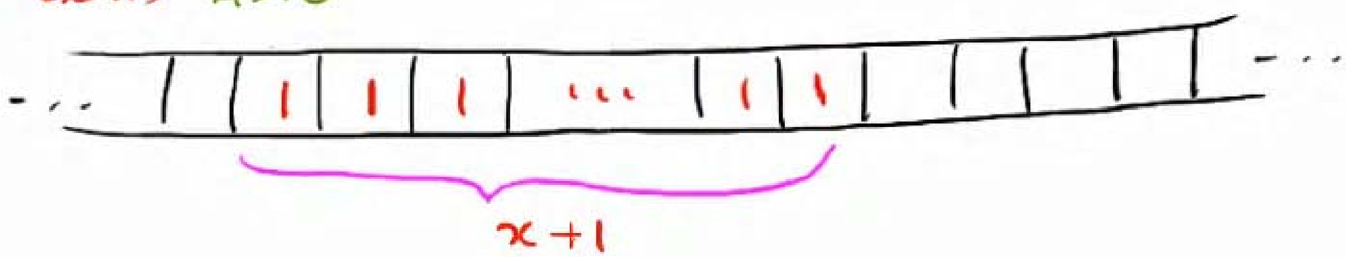


FUNZIONI TURING-CALCOLABILI

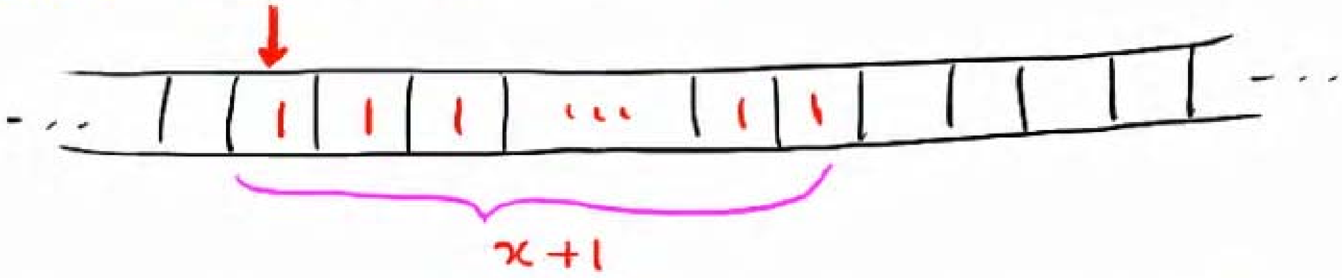
- OCCORRE CONVENIRE COME RAPPRESENTARE I NUMERI NATURALI
- ADOTTEREMO LA SEGUENTE CONVENZIONE:
  - SUPPONIAMO CHE $s_1 \equiv 1$
  - USEREMO IL SIMBOLO 1 COME UN'ASTA NELLA NUMERAZIONE UNARIA

ESEMPIO

IL NUMERO x SARÀ RAPPRESENTATO MEDIANTE $(x+1)$ ASTE



- LA FUNZIONE PARZIALE $f_M(x)$ CALCOLATA DA M E' DEFINITA COME SEGUE:
  - SI CONSIDERI LA COMPUTAZIONE DI M A PARTIRE DALLA CONFIGURAZIONE

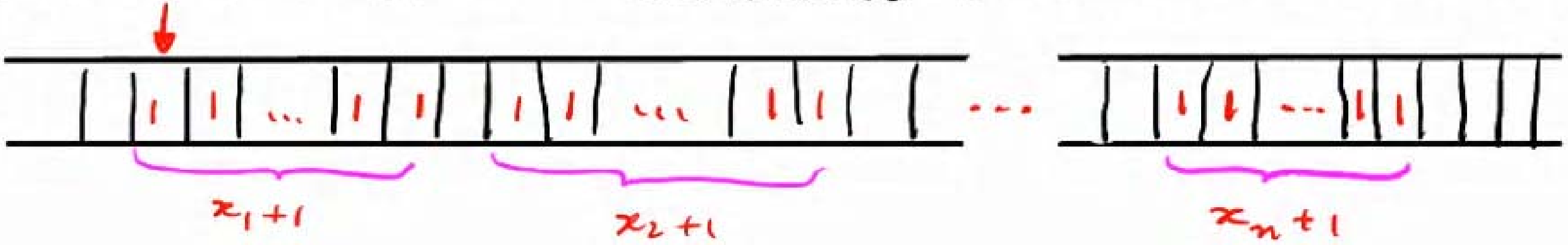


CON M NELLO STATO q_1 E LA TESTINA POSIZIONATA SULLA CASELLA INDICATA DALLA FRECCIA

- QUINDI

$$f_M(x) = \begin{cases} \text{NUMERO DELLE OCCORRENZE DEL SIMBOLO } 1 \text{ PRESENTI SUL NASTRO ALLA FINE DELLA COMPUTAZIONE, SE } M \text{ SI ARRESTA} \\ \uparrow \quad \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA FUNZIONE PARZIALE n-ARIA $f_M(x_1, \ldots, x_n)$ CALCOLATA DA M SI DEFINISCE IN MANIERA SIMILE, MA A PARTIRE DALLA CONFIGURAZIONE INIZIALE DI NASTRO:



ESEMPIO

- SIA $M: \begin{array}{l} q_1\ 0\ R\ q_1 \\ q_1\ 1\ 0\ q_2 \\ q_2\ 0\ R\ q_2 \\ q_2\ 1\ R\ q_1 \end{array}$

ALFABETO DI $M = \{0, 1\}$

STATI DI $M = \{q_1, q_2\}$

- LA FUNZIONE UNARIA CALCOLATA DA M E'

$$f(x) = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$$

- IN GENERALE, LA FUNZIONE n-ARIA CALCOLATA DA M E'

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left\lceil \frac{x_1}{2} \right\rceil + x_2 + \ldots + x_n + n - 1$$

DEFINIZIONE

UNA FUNZIONE PARZIALE SI DICE TURING-CALCOLABILE SE ESISTE UNA MACCHINA DI TURING CHE LA CALCOLA.

LA FAMIGLIA DELLE FUNZIONI TURING-CALCOLABILI SI INDICA CON $\mathcal{C}_{TUR}$

ESEMPIO

LA FUNZIONE $x+y$ E' TURING - CALCOLABILE

- SI CONSIDERI LA SEGUENTE MACCHINA DI TURING M

M: $q_1 1 B q_1$

$q_1 B R q_2$

$q_2 1 B q_3$

$q_2 B R q_2$

- E' FACILE VERIFICARE CHE M CALCOLA $x+y$

$$f_M^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad , \quad f_M^{(1)}(x_1) = \begin{cases} x_1 - 1 & \text{SE } x_1 \geq 1 \\ \uparrow & \end{cases}$$

$$f_M^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n + n - 2 \text{, PER } n \geq 2$$

TEOREMA

$$\mathcal{C}_{URM} = \mathcal{R} = \mathcal{C}_{TUR}$$

(SI DIMOSTRA MEDIANTE SIMULAZIONE)

ESERCIZIO

DARE LA SPECIFICA DI MACCHINE DI TURING CHE CALCOLINO LE FUNZIONI

(a) $x \dot{-} 1$

(b) $2x$

(c) $3x + 2$

VARIANTI DELLE MACCHINE DI TURING

- DIVERSE CONVENZIONI DI INPUT/OUTPUT E DI FERMATA
- USO DI PIÙ NASTRI
- USO DI PIÙ TESTINE DI LETTURA SULLO STESSO NASTRO
- MACCHINE NON-DETERMINISTICHE

....

E' STATO DIMOSTRATO CHE TUTTE LE VARIANTI DI MACCHINE DI TURING STUDIATE SONO COMPUTAZIONALMENTE EQUIVALENTI