

MINIMALIZZAZIONE

- MEDIANTE PROGRAMMI URN È POSSIBILE EFFETTUARE LA RICERCA DEL PIÙ PICCOLO INDICE PER CUI SI VERIFICA UNA CERTA CONDIZIONE. SE TALE INDICE NON ESISTE LA RICERCA PUÒ ANDARE AVANTI ALL'INFINITO.
- LA MINIMALIZZAZIONE (NON LIMITATA) CONSENTE DI DEFINIRE UNA FUNZIONE $g(\vec{x})$ A PARTIRE DA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ PONENDO

$$g(\vec{x}) =_{\text{def}} \text{minimo } y \text{ tale che } f(\vec{x}, y) = 0$$

- SE $f(\vec{x}, y)$ FOSSE CALCOLABILE, UN MODO PER CALCOLARE $g(\vec{x})$ CONSISTE NEL CALCOLARE $f(\vec{x}, 0), f(\vec{x}, 1), f(\vec{x}, 2), \dots$ FINO A TROVARE IL PRIMO y TALE CHE $f(\vec{x}, y) = 0$
- CHE COSA SUCCEDERE SE
 - $f(\vec{x}, y) \neq 0$, PER OGNI y , OPPURE
 - ESISTE z TALE CHE
 - $f(\vec{x}, z) \uparrow$
 - $f(\vec{x}, w) \neq 0$, PER OGNI $w < z$?
- IN ENTRAMBI I CASI CONVENIAMO CHE $g(\vec{x})$ SIA NON DEFINITA

DEFINIZIONE

- DATA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ (ANCHE PARZIALE)
PONIATO

$$\mu_y (f(\vec{x}, y) = 0) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE} \\ \bullet f(\vec{x}, z) \downarrow \text{ PER OGNI } z \leq y \\ \bullet f(\vec{x}, y) = 0 \\ \text{SE UN SIFFATTO } y \text{ ESISTE} \\ \uparrow \\ \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- μ E' DETTO OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE ■
- L'INSIEME C_{URM} E' CHIUSO RISPETTO ALL'OPERAZIONE DI MINIMALIZZAZIONE

TEOREMA

SE $f(\vec{x}, y)$ È CALCOLABILE, LA FUNZIONE
 $g(\vec{x}) = \mu y (f(\vec{x}, y) = 0)$ È CALCOLABILE.

DIM SIA $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

SIA F UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x}, y)$

SIA $m = \max(n+1, p(F))$.

IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA $g(\vec{x})$:

$T(1, m+1)$

\vdots

$T(n, m+n)$

$I_p: R_1 \leftarrow f_F(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+1})$

$J(1, m+n+2, q)$

$S(m+n+1)$

$J(1, 1, p)$

$I_q: T(m+n+1, 1)$ ■

COROLLARIO

SIA $R(\vec{x}, y)$ UN PREDICATO DECIDIBILE.

ALLORA LA FUNZIONE

$$g(\vec{x}) = \mu y R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE } R(\vec{x}, y) \text{ E' VERO} \\ \uparrow \\ \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE.

DIM.

E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE:

$$g(\vec{x}) = \mu y (\overline{sg}(c_R(\vec{x}, y)) = 0). \quad \blacksquare$$

- L'OPERATORE μ CONSENTE DI DERIVARE FUNZIONI
NON TOTALI A PARTIRE DA FUNZIONI TOTALI

- SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

$$\text{SIA } f(x, y) = |x - y^2|$$

$$\text{PONIAMO } g(x) = \mu y (f(x, y) = 0)$$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{SE } x \text{ È UN QUADRATO PERFETTO} \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

ESERCIZI

(1) SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE, TOTALE E INIETTIVA.

SI DIMOSTRI CHE ANCHE f^{-1} E' CALCOLABILE

(2) SIA $p(x)$ UN POLINOMIO A COEFFICIENTI IN \mathbb{Z} .
SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$f(z) = \text{"minimo } y \in \mathbb{N} \text{ tale che } p(y) - z = 0\text{"}$

E' CALCOLABILE

(3) SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{SE } y \neq 0 \text{ E } y|x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

E' CALCOLABILE

FUNZIONE DI ACKERMANN

- SI CONSIDERI LA SEGUENTE DEFINIZIONE PER RICORSIONE:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(0, y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y = 0 \\ 2 & \text{SE } y = 1 \\ y+2 & \text{SE } y > 1 \end{cases} \\ \psi(x, 0) = 1 \\ \psi(x+1, y+1) = \psi(x, \psi(x+1, y)) \end{array} \right.$$

- CON LA NOTAZIONE $\psi_x(y) \equiv \psi(x, y)$ ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \psi_{x+1}(y+1) &= \psi_x(\psi_{x+1}(y)) = \psi_x(\psi_x(\psi_{x+1}(y-1))) = \psi_x^{(2)}(\psi_{x+1}(y)) \\ &= \psi_x^{(3)}(\psi_{x+1}(y-2)) = \dots = \psi_x^{(y+1)}(\psi_{x+1}(0)) = \psi_x^{(y+1)}(1) \end{aligned}$$

• ALLA LUCE DEI CASI BASE, CHE CI CONSENTONO DI CALCOLARE

- $\psi_0(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$

- $\psi_x(0)$, PER OGNI $x \in \mathbb{N}$

LA RELAZIONE $\psi_{x+1}(y+1) = \psi_x^{(y+1)}(1)$ CI CONSENTE
DI AFFERMARE CHE SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE

$\psi_1(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$

$\psi_2(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$

\vdots \vdots \vdots \vdots

CIOE' SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE $\psi_x(y)$,

PER OGNI $x \in \mathbb{N}$ E $y \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	...
0	1	1	1	1	1	...
1	2	2	2	2	2	...
2	4	2·2	2 ²	2 ²	2 ²	...
3	5	2·3	2 ³	2 ^{2²}	2 ^{2^{2²}}	...
4	6	2·4	2 ⁴	2 ^{2^{2²}}	2 ^{2^{2^{2²}}}	...
5	7	2·5	2 ⁵
6	8	2·6	2 ⁶
7	9	2·7	2 ⁷

$$\psi_4(4) = \psi_3(\psi_4(3))$$

$$= 2^{2^{\dots^2}} \left. \vphantom{2^{2^{\dots^2}}} \right\} \psi_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 2^{16}$$

$$\psi_4(3) = \psi_3(\psi_4(2))$$

$$= 2^{2^{\dots^2}} \left. \vphantom{2^{2^{\dots^2}}} \right\} \psi_4(2) = 4$$

$$\psi_4(2) = \psi_3(\psi_4(1))$$

$$= 2^{2^{\dots^2}} \left. \vphantom{2^{2^{\dots^2}}} \right\} \psi_4(1) = 2$$

$$\psi_4(1) = \psi_3(\psi_4(0)) = \psi_3(1) = 2$$

CALCOLABILITÀ DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN

- INTENDIAMO CARATTERIZZARE INSIEMI FINITI S DI TRIPLE $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ TALI CHE PER OGNI $(x, y, z) \in S$:

• $z = \psi(x, y)$ ED INOLTRE

• S CONTIENE TUTTE LE TRIPLE $(x, y, \psi(x, y, 1))$ NECESSARIE AL CALCOLO DI $\psi(x, y)$.

(INSIEMI VALIDI)

ESEMPIO

SE $(2, 2, 4) \in S$, ALLORA POICHÉ

$$\psi(2, 2) = \psi(1, \psi(2, 1)) = \psi(1, 2) = \psi(0, \psi(1, 1)) = \psi(0, 2) = 4$$

$$\psi(2, 1) = \psi(1, \psi(2, 0)) = \psi(1, 1) = \psi(0, \psi(1, 0)) = \psi(0, 1) = 2$$

SI HA: $(2, 1, 2), (1, 2, 4), (0, 2, 4), (2, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 1) \in S$

INTRODUCIAMO LA SEGUENTE DEFINIZIONE:

UN INSIEME FINITO S DI TRIPLE È VALIDO SE

$$(a) \quad (0, y, z) \in S \Rightarrow z = \psi_0(y)$$

$$(b) \quad (x, 0, z) \in S \Rightarrow z = 1$$

$$(c) \quad (x+1, y+1, z) \in S \Rightarrow \exists u \text{ tale che:}$$

$$(x+1, y, u) \in S, \quad (x, u, z) \in S$$

UN INSIEME FINITO S DI TRIPLE È VALIDO PER $(x, y) \in \mathbb{N}^2$
SE $(x, y, z) \in S$, PER QUALCHE $z \in \mathbb{N}$

FATTO 0 Le equazioni definiscono una funzione ψ

FATTO 1 Se S è valido allora per ogni $(x, y, z) \in S$
si ha $z = \psi(x, y)$

FATTO 2 Per ogni (i, j) esiste un insieme finito S di terne
valido per (i, j) .

Per induc. su (i, j) .

Sia (\bar{x}, \bar{y}) minima tale che non esiste alcun insieme S
valido per (\bar{x}, \bar{y}) .

$$\begin{aligned} - \bar{x} = 0 &\rightarrow \begin{cases} \bar{y} = 0 &\rightarrow \{(0, 0, 1)\} \text{ valido per } (0, 0) \\ \bar{y} = 1 &\rightarrow \{(0, 1, 2)\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (0, 1) \\ \bar{y} > 1 &\rightarrow \{(0, \bar{y}, \bar{y}+2)\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (0, \bar{y}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$- \bar{y} = 0 \rightarrow \{(\bar{x}, 0, 1)\} \text{ valido per } (\bar{x}, 0)$$

- Siamo :
 - S_1 ins. finito valido per $(\bar{x}, \bar{y}-1)$
 - S_2 ins. finito valido per $(\bar{x}-1, \psi(\bar{x}, \bar{y}-1))$

Allora $S = S_1 \cup S_2 \cup \{(\bar{x}, \bar{y}, \psi(\bar{x}, \bar{y}))\}$ è finito e valido per (\bar{x}, \bar{y})

$\text{cod}(x, y, z)$: codifica effettiva della tripla (x, y, z)
 $\text{IS_TRIPLE}(t)$: t è il codice di una tripla
 $\text{first}(t)$: primo elemento di t , se t è una tripla
 $\text{second}(t)$: secondo elemento di t , se t è una tripla
 $\text{third}(t)$: terzo elemento di t , se t è una tripla
 $\text{cod}(S)$: codifica effettiva di un insieme finito di numeri
 $\text{IS_SET_OF_TRIPLES}(v)$: v è il codice di un insieme finito di triple
 $\text{IN}(t, v)$: la tripla di codice t appartiene all'insieme di triple di codice v
 $\text{VALID_FOR}(v, x, y)$: v è il codice di un insieme di triple valido per (x, y)

$$\psi(x, y) = \mu z (\text{IN}(\text{cod}(x, y, z), \mu v (\text{VALID_FOR}(v, x, y))))$$

POICHE'

- LA FUNZIONE $\text{cod}(x, y, z)$ È CALCOLABILE
- I PREDICATI $\text{IN}(t, v)$ E $\text{VALID_FOR}(v, x, y)$ SONO DECIDIBILI
- SI DEDUCE LA CALCOLABILITA' DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN $\psi(x, y)$.

CALCOLABILITA' E DECIDIBILITA' DI ALCUNE FUNZIONI E PREDICATI

✓ $\text{cod}(x, y, z) \equiv 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

✓ $\text{IS_TRIPLE}(t) \equiv (\forall i)_{\leq t} ((t)_i \neq 0 \rightarrow i \leq 3)$

✓ $\text{first}(t) \equiv (t)_1$

✓ $\text{second}(t) \equiv (t)_2$

✓ $\text{third}(t) \equiv (t)_3$

✓ $\text{VALID_FOR}(v, x, y) \equiv$

$\text{IS_SET_OF_TRIPLES}(v)$

$\wedge (\forall i)_{\leq v} (\text{IN}(i, v) \rightarrow ((\text{first}(i) = 0 \rightarrow ((\text{second}(i) = 0 \rightarrow \text{third}(i) = 1) \wedge (\text{second}(i) = 1 \rightarrow \text{third}(i) = 2) \wedge (\text{second}(i) > 1 \rightarrow \text{third}(i) = \text{second}(i) + 2)))$

$\wedge (\text{second}(i) = 0 \rightarrow \text{third}(i) = 1)$

$\wedge ((\text{first}(i) > 0 \wedge \text{second}(i) > 0)$

$\rightarrow (\exists u)_{\leq v} (\text{IN}(\text{cod}(x, y=1, u), v)$

$\wedge \text{IN}(\text{cod}(x=1, u, z), v))$

$\wedge (\exists z)_{\leq v} (\text{IN}(\text{cod}(x, y, z), v))$

✓ $\left[\text{cod}(S) \equiv \prod_{u \in S} p_u \right]$

✓ $\text{IS_SET_OF_TRIPLES}(v)$

$\equiv (\forall i)_{\leq v} ((v)_i \neq 0 \rightarrow ((v)_i = 1 \wedge \text{IS_TRIPLE}(i)))$

✓ $\text{IN}(t, v) = "(v)_t = 1"$