

# RICORSIONE

MEDIANTE LA RICORSIONE E' POSSIBILE DEFINIRE **NUOVI**  
VALORI DI UNA FUNZIONE MEDIANTE **VECCHI** VALORI

## ESEMPI

FATTORIALE:  $0! = 1$

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad , \quad \text{PER} \quad n \geq 1$$

## NUMERI DI FIBONACCI

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad , \quad \text{PER} \quad n \geq 2$$

LA DEFINIZIONE PER RICORSIONE CHE USEREMO E' LA SEGUENTE (RICORSIONE PRIMITIVA)

SIANO  $f(\vec{x})$  E  $g(\vec{x}, y, z)$  FUNZIONI.

ALLORA

$$(*) \quad h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

$$(**) \quad h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$$

COSTITUISCE UNA DEFINIZIONE PER RICORSIONE DI  $h(\vec{x}, y)$  DA  $f(\vec{x})$  E  $g(\vec{x}, y, z)$ .

LE EQUAZIONI  $(*)$ ,  $(**)$  SONO DETTE EQUAZIONI RICORSIVE

LA PRECEDENTE DEFINIZIONE TRAGGE FORZA DAL SEGUENTE  
TEOREMA

SIA  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  E SIANO  $f(\vec{x})$  E  $g(\vec{x}, y, z)$  FUNZIONI.  
ALLORA ESISTE UN' UNICA FUNZIONE  $h(\vec{x}, y)$  SODDISFACENTE  
LE EQUAZIONI RICORSIVE:

$$h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

$$h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \quad \bullet$$

NEL CASO IN CUI LE  $\vec{x}$  FOSSERO ASSENTI, CIOE'  $n=0$ ,  
LE EQUAZIONI RICORSIVE DIVENTANO

$$h(0) = a$$

$$h(y+1) = g(y, h(y))$$

## ESempi

### (a) ADDIZIONE

$$\begin{cases} x+0 = x \\ x+(y+1) = (x+y)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x,0) = x \\ h(x,y+1) = \text{succ}(h(x,y)) \end{cases}$$

### (b) MOLTIPLICAZIONE

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot (y+1) = x \cdot y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x,0) = 0 \\ h(x,y+1) = h(x,y) + x \end{cases}$$

### (c) FATTORIALE

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (y+1)! = y! \cdot (y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0) = 1 \\ h(y+1) = h(y) \cdot (y+1) \end{cases}$$

## TEOREMA

SE  $f(\vec{x})$  E  $g(\vec{x}, y, z)$  SONO CALCOLABILI, ALLORA ANCHE LA FUNZIONE  $h(\vec{x}, y)$  DEFINITA PER RICORSIONE DA  $f(\vec{x})$  E  $g(\vec{x}, y, z)$  E' CALCOLABILE.

## DIM

SIANO  $F$  E  $G$  PROGRAMMI IN FORMA STANDARD CHE CALCOLANO RISPETTIVAMENTE  $f$  E  $g$ .

PONIAMO  $m = \max(p(F), p(G), n+2)$ , OVE  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .  
E' FACILE CONVINCERSI CHE IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA LA FUNZIONE  $h(\vec{x}, y)$ .  $\therefore$

$$T(1, m+1)$$

⋮

$$T(n+1, m+n+1)$$

$$R_{m+n+3} \leftarrow f_F(R_{m+1}, \dots, R_{m+n})$$

$$I_q: J(m+n+2, m+n+1, p)$$

$$R_{m+n+3} \leftarrow f_G(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+2}, R_{m+n+3})$$

$$S(m+n+2)$$

$$J(1, 1, q)$$

$$I_p: T(m+n+3, 1)$$



PROCEDIAMO ADESSO ALLA COMPILAZIONE DI UNA NUTRITA LISTA DI FUNZIONI CALCOLABILI

(a)  $x+y$

$$\begin{cases} x+0 = x \\ x+(y+1) = (x+y)+1 \end{cases}$$

$$f(x) = U_1'(x)$$

$$g(x, y, z) = z+1$$

(b)  $x \cdot y$

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x \end{cases}$$

$$f(x) = \underline{0}(x)$$

$$g(x, y, z) = z + x$$

(c)  $x^y$

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{y+1} = x^y \cdot x \end{cases}$$

$$f(x) = \underline{0}(x) + 1$$

$$g(x, y, z) = z \cdot x$$

$$(d) \quad y \dot{\div} 1 \\ \begin{cases} 0 \dot{\div} 1 = 0 \\ (y+1) \dot{\div} 1 = y \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$g(y, z) = y$$

$$(e) \quad x \dot{\div} y =_{\text{def}} \begin{cases} x - y & \text{SE } x \geq y \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \dot{\div} 0 = x \\ x \dot{\div} (y+1) = (x \dot{\div} y) \dot{\div} 1 \end{cases}$$

$$f(x) = U_1'(x)$$

$$g(x, y, z) = z \dot{\div} 1$$

$$(f) \quad \text{sg}(y) =_{\text{def}} \begin{cases} 0 & \text{SE } y = 0 \\ 1 & \text{SE } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sg}(0) = 0 \\ \text{sg}(y+1) = 1 \end{cases}$$

$$a = 0$$

$$g(y, z) = 1$$



$$(g) \quad \overline{sg}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y=0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) = 1 \\ \overline{sg}(y+1) = 0 \end{cases}$$

oppure:  $\overline{sg}(y) = 1 \div sg(y)$

$$a = 1$$

$$g(y, z) = \underline{0}(y, z)$$

$$(h) \quad |x-y|$$

$$\bullet \quad |x-y| = (x \div y) + (y \div x)$$

$$(i) \quad y!$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (y+1)! = y! \cdot (y+1) \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$g(y, z) = (y+1) \cdot z$$

(j)  $\min(x, y)$

- $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

(k)  $\max(x, y)$

- $\max(x, y) = x + (y \dot{-} x)$

(l)  $rm(x, y) =_{df}$  "resto della divisione di  $y$  per  $x$ "  
(con la convenzione che  $rm(0, y) = y$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} rm(x, 0) = 0 \\ rm(x, y+1) = \begin{cases} rm(x, y) + 1 & \text{SE } rm(x, y) + 1 \neq x \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \end{array} \right.$$
$$= (rm(x, y) + 1) \cdot \text{sg}(|x - (rm(x, y) + 1)|)$$

$$f(x) = \underline{0}(x), \quad g(x, y, z) = (z+1) \cdot \text{sg}(|x - (z+1)|)$$

(rm)  $qt(x, y) =$  "quoziente della divisione di  $y$  per  $x$ "  
(promissum  $q(0, y) = 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} qt(x, 0) = 0 \\ qt(x, y+1) = \begin{cases} qt(x, y) + 1 & \text{SE } rm(x, y) + 1 = x \\ qt(x, y) & \text{SE } rm(x, y) + 1 \neq x \end{cases} \end{array} \right.$$
$$= qt(x, y) + \overline{sg}(|x - (rm(x, y) + 1)|)$$

$$f(x) = \underline{0}, \quad g(x, y, z) = z + \overline{sg}(|x - (rm(x, y) + 1)|)$$

$$(m) \quad \text{div}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \mid y \\ 0 & \text{SE } x \nmid y \end{cases}$$

CONVENIAMO CHE  $0 \mid 0$   
MA  $0 \nmid y$  SE  $y \neq 0$

- $\text{div}(x, y) = \overline{\text{sg}}(\text{rm}(x, y))$

LEMMA (DEFINIZIONE PER CASI)

SE  $f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})$  SONO FUNZIONI CALCOLABILI TOTALI

E  $M_1(\vec{x}), \dots, M_k(\vec{x})$  SONO PREDICATI DECIDIBILI TALI

CHE PER OGNI  $\vec{x}$  ESATTAMENTE UNO TRA

$M_1(\vec{x}), \dots, M_k(\vec{x})$  E' VERO, ALLORA LA FUNZIONE

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}) & \text{SE } M_1(\vec{x}) \text{ E' VERO} \\ \vdots & \vdots \\ f_k(\vec{x}) & \text{SE } M_k(\vec{x}) \text{ E' VERO} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE.

DLM E' SUFFICIENTE VERIFICARE CHE

$$g(\vec{x}) = c_{M_1}(\vec{x}) \cdot f_1(\vec{x}) + \dots + c_{M_k}(\vec{x}) \cdot f_k(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

## ALGEBRA DELLA DECIDIBILITÀ

SE  $M(\vec{x})$  E  $Q(\vec{x})$  SONO PREDICATI DECIDIBILI,  
ALLORA ANCHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

(a) "not  $M(\vec{x})$ "

$$c_{\text{not } M}(\vec{x}) = 1 - c_M(\vec{x})$$

(b) "and  $M(\vec{x})$  e  $Q(\vec{x})$ "

$$c_{M \text{ and } Q}(\vec{x}) = c_M(\vec{x}) \cdot c_Q(\vec{x})$$

(c) "or  $M(\vec{x})$  e  $Q(\vec{x})$ "

$$c_{M \text{ or } Q}(\vec{x}) = \max(c_M(\vec{x}), c_Q(\vec{x}))$$

## SOMMATORIE E PRODOTTI LIMITATI

È POSSIBILE DEFINIRE PER RICORSIONE LE SEGUENTI FUNZIONI

$$\sum_{z < y} f(\vec{x}, z) \quad (\text{SOMMATORIA LIMITATA})$$

$$\prod_{z < y} f(\vec{x}, z) \quad (\text{PRODOTTO LIMITATO})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{z < 0} f(\vec{x}, z) = 0 \\ \sum_{z < y+1} f(\vec{x}, z) = \\ \sum_{z < y} f(\vec{x}, z) + f(\vec{x}, y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{z < 0} f(\vec{x}, z) = 1 \\ \prod_{z < y+1} f(\vec{x}, z) = \\ \left( \prod_{z < y} f(\vec{x}, z) \right) \cdot f(\vec{x}, y) \end{array} \right.$$

## TEOREMA

SE  $f(\vec{x}, z)$  È CALCOLABILE, ANCHE LE FUNZIONI

$\sum_{z \in Y} f(\vec{x}, z)$  E  $\prod_{z \in Y} f(\vec{x}, z)$  SONO CALCOLABILI

## COROLLARIO

SE  $f(\vec{x}, z)$  E  $k(\vec{x}, \vec{w})$  SONO CALCOLABILI, RISULTANO  
CALCOLABILI ANCHE LE FUNZIONI

$\sum_{z \in k(\vec{x}, \vec{w})} f(\vec{x}, z)$  E  $\prod_{z \in k(\vec{x}, \vec{w})} f(\vec{x}, z)$



## OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE LIMITATA

DATO UN PREDICATO  $M(\vec{x}, z)$  PONIAMO:

$$\mu_{z < y} (M(\vec{x}, z)) = \begin{cases} \text{minimo } z < y \text{ tale che } M(\vec{x}, z) \text{ è vero} \\ \text{se tale } z \text{ esiste} \\ y \text{ altrimenti} \end{cases}$$

### TEOREMA

SIA  $f(\vec{x}, z)$  UNA FUNZIONE CALCOLABILE E TOTALE.

ALLORA LA FUNZIONE  $\mu_{z < y} (f(\vec{x}, z) = 0)$  È ANCH'ESSA CALCOLABILE E TOTALE.

DIM. SI CONSIDERI LA FUNZIONE  $h(\vec{x}, v) = \prod_{\text{def } u \leq v} \text{sg}(f(\vec{x}, u))$ ,

SIA  $z_0 = \mu_{z < y} (f(\vec{x}, z) = 0)$ .  
POICHÉ  $h(\vec{x}, v) = \begin{cases} 1 & \text{SE } v < z_0 \leftarrow \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

SI HA  $\mu_{z < y} (f(\vec{x}, z) = 0) = \sum_{v < y} h(\vec{x}, v)$ , DA CUI LA CALCOLABILITÀ

### COROLLARIO

SE  $f(\vec{x}, z)$  E  $k(\vec{x}, \vec{w})$  SONO FUNZIONI CALCOLABILI E TOTALI,  
TALE RISULTA ANCHE LA FUNZIONE  
 $\mu z < k(\vec{x}, \vec{w}) (f(\vec{x}, z) = 0)$  ■

### COROLLARIO

SIA  $R(\vec{x}, y)$  UN PREDICATO DECIDIBILE. ALLORA  
(a) LA FUNZIONE  $f(\vec{x}, y) = \mu z < y R(\vec{x}, z)$  E' CALCOLABILE

$$f(\vec{x}, y) = \mu z < y (\overline{\text{sg}}(c_R(\vec{x}, z)))$$

(b) I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

$$M_1(\vec{x}, y) \equiv (\forall z < y) R(\vec{x}, z)$$

$$C_{M_1}(\vec{x}, y) = \prod_{z < y} c_R(\vec{x}, z)$$

$$M_2(\vec{x}, y) \equiv (\exists z < y) R(\vec{x}, z)$$

$$M_2(\vec{x}, y) = \underline{\text{not}} ((\forall z < y) \underline{\text{not}} R(\vec{x}, z))$$

$$\text{OPPURE } C_{M_2}(\vec{x}, y) = \overline{\text{sg}} \left( \sum_{z < y} c_R(\vec{x}, z) \right) \quad \blacksquare$$

TEOREMA: I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

" $x = y$ ", " $x > y$ ", " $x \geq y$ "

TEOREMA

LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

(a)  $D(x) = \#$  divisori di  $x$  (PER CONVENZIONE  $D(0) = 1$ )

$$D(x) = \sum_{y \leq x} \text{div}(y, x)$$

(b)  $P_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \text{ E' PRIMO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$$P_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } D(x) = 2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \overline{\text{sg}}(|D(x) - 2|)$$

(c)  $P_x = \text{"}x\text{-esimo primo"}$  ( $P_0 = 0, P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5, \dots$ )

$$P_0 = 0$$

$$P_{x+1} = \mu z \leq (P_x! + 1) (z > P_x \text{ and } P_r(z) = 1)$$

$$(d) \quad (x)_y = \begin{cases} \text{esponente di } p_y \text{ nella fattorizzazione di } x & \text{se } x, y > 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \text{ oppure } y=0 \end{cases}$$

$$(x)_y = \mu z < x \quad (p_y^{z+1} \nmid x)$$

SI OSSERVI CHE GRAZIE ALLA FUNZIONE  $(x)_y$  RISULTA POSSIBILE CODIFICARE LA SEQUENZA DI INTERI  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  MEDIANTE IL NUMERO  $b = p_1^{a_1+1} \cdot p_2^{a_2+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$ .

QUINDI SI HA:

$$n = \mu z < b \quad ((b)_{z+1} = 0)$$

$$a_i = (b)_i \div 1, \quad \text{PER } i = 1, 2, \dots, n,$$

## ESEMPIO (NUMERI DI FIBONACCI)

COME TRATTARE LA RICORSIONE

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 1 \\ f(y+2) = f(y) + f(y+1) \end{cases} \quad ?$$

SI DEFINISCA  $g(y) = 2^{f(y)} \cdot 3^{f(y+1)}$

SI HA:  $g(0) = 2^{f(0)} \cdot 3^{f(1)} = 2^1 \cdot 3^1 = 6$

$$\begin{aligned} g(y+1) &= 2^{f(y+1)} \cdot 3^{f(y+2)} = 2^{f(y+1)} \cdot 3^{f(y) + f(y+1)} \\ &= 2^{(g(y))_2} \cdot 3^{(g(y))_1 + (g(y))_2} \end{aligned}$$

QUINDI  $g(y)$  È CALCOLABILE.

POICHÉ  $f(y) = (g(y))_1$ , ANCHE  $f(y)$  È CALCOLABILE

# ESERCIZI

(1) DIMOSTRARE CHE LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

(a) TUTTI I POLINOMI  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$   
CON  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

(b)  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$

(c)  $\gcd(x, y)$  (MASSIMO COMUN DIVISORE)

(d)  $\text{lcm}(x, y)$  (MINIMO COMUNE MULTIPLO)

(e)  $f(x) =$  "numero divisori primi di  $x$ "

(f)  $\varphi(x) =$  "numero interi positivi minori di  $x$   
e primi con  $x$ "

(FUNZIONE DI EULERO)

ES. 2

SIA  $\pi(x, y) = 2^x(2y+1) - 1$ .

(a) SI DIMOSTRI CHE  $\pi$  È UNA BIEZIONE CALCOLABILE DA  $\mathbb{N}^2$  SU TUTTO  $\mathbb{N}$ ,

SIANO INOLTRE  $\pi_1, \pi_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  TALI CHE

$$\pi(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z.$$

(b) SI DIMOSTRI CHE  $\pi_1$  E  $\pi_2$  SONO CALCOLABILI

(3) DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI

(a) "x È DISPARI"

(b) "x È UNA POTENZA DI UN NUMERO PRIMO"

(c) "x È UN CUBO PERFETTO, ODE'  $x = y^3$  PER QUALCHE INTERO y"



# ES. 4

- OGNI NUMERO  $x \in \mathbb{N}$  PUO' ESSERE SCRITTO NELLA FORMA

$$(a) \quad x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i, \quad \text{CON } \alpha_i \in \{0, 1\}$$

IN UN SOLO MODO

- QUINDI OGNI  $x \geq 0$  AMMETTE ESPRESSIONI UNIVOCHE DELLA FORMA:

$$(b) \quad x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_l}, \quad \text{CON } 0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_l \quad \text{E } l \geq 1$$

$$(c) \quad x = 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2+1} + \dots + 2^{a_1+a_2+\dots+a_l+(l-1)},$$

CON  $a_i \geq 0, i=1, \dots, l, \quad \text{E } l \geq 1$

RISULTANO QUINDI DEFINITE LE SEGUENTI FUNZIONI:

$$- \alpha(i, x) =_{\text{def}} \alpha_i \quad \left( \text{CON } x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i \right)$$

$$- l(x) =_{\text{def}} \begin{cases} l & \text{SE } x \geq 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$b(i, x) = \begin{cases} b_i & \text{SE } x \geq 0 \text{ E } 1 \leq i \leq l \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\left( \text{CON } x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_l}, \right.$$

$$= 2^{a_1} + 2^{a_1+a_2-1} + \dots$$

$$\dots + 2^{a_1+a_2+\dots+a_l+(l-1)} \left. \text{SE } x \geq 0 \right)$$

ES. 4 (contd)

$$a(i, x) = \begin{cases} a_i & \text{SE } x > 0 \text{ E } 1 \leq i \leq l \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI DIMOSTRI CHE LE FUNZIONI  $\alpha(i, x)$ ,  $l(x)$ ,  $b(i, x)$ ,  $a(i, x)$   
SONO CALCOLABILI.

---

- ABBIAMO DIMOSTRATO CHE

- LE FUNZIONI INIZIALI SONO CALCOLABILI
- LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI DA' LUOGO A FUNZIONI CALCOLABILI
- LA RICORSIONE APPLICATA A FUNZIONI CALCOLABILI DA' LUOGO A FUNZIONI CALCOLABILI

- LE FUNZIONI CHE SI OTTENGONO A PARTIRE DALLE FUNZIONI INIZIALI MEDIANTE L'APPLICAZIONE DI UN NUMERO FINITO DI COMPOSIZIONI E RICORSIONI SI DICONO PRIMITIVE RICORSIVE (PR)

- CHE RELAZIONE C'E' TRA  $C_{URM}$  E  $PR$
- OVVIAMENTE VALE  $PR \subseteq C_{URM}$
- INOLTRE POICHE' TUTTE LE FUNZIONI IN  $PR$  SONO TOTALI, MENTRE  $C_{URM}$  CONTIENE ANCHE FUNZIONI PARZIALI, SI HA  $PR \subsetneq C_{URM}$
- CHE RELAZIONE C'E' TRA  $PR$  E  $Tot(C_{URM})$ , CIOE' L'INSIEME DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI E TOTALI?
- SI DIMOSTRA CHE  $PR \subsetneq Tot(C_{URM})$   
(FUNZIONE DI ACKERMANN)
- C'E' QUINDI BISOGNO DI QUALCHE ALTRO MECCANISMO PER GENERARE FUNZIONI CALCOLABILI (MINIMALIZZAZIONE)