INSIEMI RICORSIVI E RICORSIVAMENTE ENUMERABILI

- C'È UNA SEMPLICE CORRISPONDENZA TRA PREDICATI UNARI E SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{N}$:

$$M(x) \longrightarrow \{x : M(x) \text{ È VERO}\} \quad \text{(ESTENSIONE DI } M\text{)}$$

$$A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \text{"}x \in A\text{"}$$

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{N}$, LA FUNZIONE CARATTERISTICA DI A È LA FUNZIONE $c_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ COSÌ DEFINITA:

$$c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in A \\ 0 & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

SE c_A È CALCOLABILE (CIOÈ IL PREDICATO "$x \in A$" È DECIDIBILE), ALLORA A È DETTO RICORSIVO. ■

NOTA ANALOGHE CONSIDERAZIONI SI POSSONO FARE PER SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{N}^n$, CON $n \geq 2$.

ESEMPI

- $\mathbb{N}$ E' RICORSIVO
- $\{2x : x \in \mathbb{N}\}$ E' RICORSIVO
- OGNI INSIEME FINITO E' RICORSIVO
- L'INSIEME DEI NUMERI PRIMI E' RICORSIVO
- $\{x : \phi_x$ E' TOTALE$\}$ NON E' RICORSIVO
- $\{x : x \in W_x\}$ NON E' RICORSIVO
- $\{x : \phi_x = \underline{0}\}$ NON E' RICORSIVO

TEOREMA SE A E B SONO INSIEMI RICORSIVI, TALI SONO GLI INSIEMI $\bar{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

DIM - SIANO M_A E M_B I PREDICATI CORRISPONDENTI AD A E B, RISPETTIVAMENTE.

- POICHÉ M_A E M_B SONO DECIDIBILI, TALI SONO ANCHE I PREDICATI

  $\underline{\text{not}}\ M_A$, $M_A\ \underline{\text{and}}\ M_B$, $M_A\ \underline{\text{or}}\ M_B$, $M_A\ \underline{\text{and}}\ \underline{\text{not}}\ M_B$.

- ESSI SONO RISPETTIVAMENTE UGUALI AI PREDICATI CORRISPONDENTI AGLI INSIEMI $\bar{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, CHE PERTANTO RISULTANO RICORSIVI. ∎

INSIEMI RICORSIVAMENTE ENUMERABILI

DEFINIZIONE SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. ALLORA A E' DETTO RICORSIVAMENTE ENUMERABILE (R.E.) SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in A \\ \uparrow & \text{SE } x \notin A \end{cases}$$

E' CALCOLABILE (CIOE' SE IL PREDICATO "$x \in A$" E' PARZIALMENTE DECIDIBILE).

ESEMPI

1. SIA $K = \{x : x \in W_x\}$. ALLORA K E' R.E. MA NON RICORSIVO
2. OGNI INSIEME RICORSIVO E' R.E.
3. L'INSIEME $\{x : W_x \neq \emptyset\}$ E' R.E. MA NON RICORSIVO
4. SE f E' UNA FUNZIONE CALCOLABILE, ALLORA L'INSIEME $Ran(f)$ E' R.E.

TEOREMA UN INSIEME E' R.E. SE E SOLO SE E' IL DOMINIO DI UNA FUNZIONE UNARIA CALCOLABILE.

DIM. SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. ALLORA

A E' R.E. $\Longleftrightarrow$ "$x \in A$" E' PARZ. DECIDIBILE

$\Longleftrightarrow$ ESISTE $g \in \mathcal{C}_1$ TALE CHE "$x \in A$" $\leftrightarrow$ $x \in Dom(g)$

$\Longleftrightarrow$ ESISTE $g \in \mathcal{C}_1$ TALE CHE $A = Dom(g)$ ∎

NOTA NE SEGUE CHE $W_0, W_1, W_2, \ldots$ E' UN'ENUMERAZIONE CON RIPETIZIONI DI TUTTI GLI INSIEMI R.E.

SE $A = W_e$, ALLORA e E' UN INDICE DI A. ∎

TEOREMA UN INSIEME A E' R.E. SE E SOLO SE ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $R(x,y)$ TALE CHE

$$x \in A \longleftrightarrow (\exists y) R(x,y)$$

DIM. SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. ALLORA

A E' R.E. $\Longleftrightarrow$ "$x \in A$" E' PARZ. DECIDIBILE

$\Longleftrightarrow$ ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $R(x,y)$ TALE CHE $x \in A \longleftrightarrow (\exists y) R(x,y)$ ■

TEOREMA SIA $M(x,y_1,\dots,y_n)$ UN PREDICATO PARZ. DECIDIBILE. ALLORA L'INSIEME $\{x : (\exists y_1)\dots(\exists y_n) M(x,y_1,\dots,y_n)\}$ E' R.E.. ■

RELAZIONE TRA INSIEMI RICORSIVI E INSIEMI R.E.

TEOREMA UN INSIEME A E' RICORSIVO SE E SOLO SE A E $\bar{A}$ SONO R.E.

DIM SE A E' RICORSIVO, ALLORA ANCHE $\bar{A}$ E' RICORSIVO. QUINDI A E $\bar{A}$ SONO IN PARTICOLARE R.E.

VICEVERSA, SE A E $\bar{A}$ SONO R.E., SIANO $R(x,y)$ E $S(x,y)$ PREDICATI DECIDIBILI TALI CHE

$$x \in A \leftrightarrow (\exists y)\, R(x,y) \qquad x \in \bar{A} \leftrightarrow (\exists y)\, S(x,y)$$

SI OSSERVI CHE: $-(\forall x)(\exists y)(R(x,y)$ **or** $S(x,y))$.

$-(\forall x)(\forall y)($ **not** $R(x,y)$ **or** **not** $S(x,y))$

PERTANTO $f(x) = \mu y\, (R(x,y)$ **or** $S(x,y))$ E' CALCOLABILE TOTALE

PONIAMO $T(x) \equiv R(x, f(x))$. $T(x)$ E' DECIDIBILE E POICHE' $x \in A \leftrightarrow T(x)$, SEGUE CHE A E' RICORSIVO. ■

CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI R.E.

TEOREMA SIA $A \subseteq \mathbb{N}$. LE SEGUENTI ASSERZIONI SONO EQUIVALENTI:

(a) A E' R.E

(b) $A = \emptyset$ OPPURE A E' IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE UNARIA

(c) A E' IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE (PARZIALE)

DIM DIMOSTREREMO LA CATENA DI IMPLICAZIONI $(a) \to (b) \to (c) \to (a)$

$(a) \to (b)$. SUPPONIAMO CHE $A \neq \emptyset$ E SIA $a \in A$.

INOLTRE, SIA f UNA FUNZIONE CALCOLABILE UNARIA TALE CHE $A = Dom(f)$ E SIA e TALE CHE $f = \phi_e$.

SI CONSIDERI LA SEGUENTE FUNZIONE BINARIA

$$g(x,t) = \begin{cases} x & \text{SE } P_e(x)\downarrow \text{ IN AL PIÙ } t \text{ PASSI} \\ a & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CHIARAMENTE, $A = Ran(g)$ E g E' CALCOLABILE.

- SI PONGA $h(z) = g((z)_1, (z)_2)$.
- SI HA: $A = Ran(g) = Ran(h)$

(b) $\rightarrow$ (c). BANALE

(c) $\rightarrow$ (a). SIA $A = Ran(h)$, CON h FUNZIONE CALCOLABILE n-ARIA.

ALLORA:

$$x \in A \longleftrightarrow (\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(h(y_1, \ldots, y_n) = x)$$

POICHE' IL PREDICATO "$h(y_1, \ldots, y_n) = x$" E' PARZ. DECIDIBILE, NE SEGUE CHE $(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(h(y_1, \ldots, y_n) = x)$ E' PARZ. DECIDIB. E QUINDI $x \in A$ E' R.E. ∎

- LA CARATTERIZZAZIONE

$A \neq \emptyset$ E' R.E. $\Longleftrightarrow$ $A = Ran(h)$, PER QUALCHE $h \in C_1$ TOTALE

E' QUELLA CHE GIUSTIFICA IL NOME RICORSIVAMENTE ENUMERABILE.

INFATTI LA FUNZIONE h CONSENTE DI ENUMERARE IN MANIERA EFFETTIVA (RICORSIVA) GLI ELEMENTI DI

$A = \{h(0), h(1), h(2), \dots\}$

- SI OSSERVI INOLTRE CHE $E_0, E_1, E_2, \dots$ COSTITUISCE UN'ENUMERAZIONE EFFETTIVA (CON RIPETIZIONI) DEGLI INSIEMI R.E.

- UN'ALTRA CARATTERIZZAZIONE INFORMALE DEGLI INSIEMI R.E. E' CHE SONO QUEGLI INSIEMI PER CUI ESISTE UNA PROCEDURA EFFETTIVA IN GRADO DI GENERARNE GLI ELEMENTI.

INFATTI, SE UN INSIEME A E' COSÌ GENERATO, POSSIAMO DEFINIRE LA SEGUENTE FUNZIONE EFFETTIVA

$f(0)$ = PRIMO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

$f(1)$ = SECONDO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

$\vdots$

$f(n)$ = $(n+1)$-ESIMO ELEMENTO GENERATO DALLA PROCEDURA

...

PER LA TESI DI CHURCH f E' CALCOLABILE ED INOLTRE VALE $A = Ran(f)$

TEOREMA L'INSIEME $\{x : \phi_x$ E' TOTALE$\}$ NON E' R.E.

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\{x : \phi_x$ E' TOTALE$\}$ SIA R.E.
E SIA $f \in \mathcal{C}_1$ TOTALE TALE CHE

$$\{x : \phi_x \text{ E' TOTALE}\} = Ran(f)$$

- PONIAMO

$$g(x) = \phi_{f(x)}(x) + 1$$

- CHIARAMENTE g E' CALCOLABILE E TOTALE E QUINDI PER QUALCHE INDICE n SI HA $g = \phi_{f(n)}$
- PERTANTO

$$\phi_{f(n)}(n) = g(n) = \phi_{f(n)}(n) + 1, \quad \text{ASSURDO}$$

- QUINDI $\{x : \phi_x$ E' TOTALE$\}$ NON E' R.E. ∎

TEOREMA SE A E B SONO R.E., ALLORA TALI SONO $A \cup B$ E $A \cap B$.

DIM - SE $A = \emptyset$ O $B = \emptyset$, CHIARAMENTE $A \cup B$ E' R.E.

- SE $A = Ran(f)$ E $B = Ran(g)$, CON $f, g \in \mathcal{C}_1$ TOTALI, SI PONGA:

$$h(x) = \begin{cases} f(x/2) & \text{SE } x \text{ E' PARI} \\ g(x \dot{-} 1/2) & \text{SE } x \text{ E' DISPARI} \end{cases}$$

SI HA CHE: $h \in \mathcal{C}_1$ E $A \cup B = Ran(h)$ E QUINDI $A \cup B$ E R.E.

- SIA $A = Dom(f)$ E $B = Dom(g)$, CON f, g CALCOLABILI ALLORA $A \cap B = Dom(fg)$ E POICHE' fg E' CALCOLABILE, SI HA CHE $A \cap B$ E' R.E. ∎

TEOREMA UN INSIEME INFINITO E' RICORSIVO SE E SOLO SE E' IL RANGE DI UNA FUNZIONE CALCOLABILE TOTALE UNARIA E CRESCENTE

DIM SIA A INFINITO E RICORSIVO. ALLORA A E' ENUMERATO DALLA SEGUENTE FUNZIONE CRESCENTE

$$\begin{cases} f(0) = \mu y\,(y \in A) \\ f(n+1) = \mu y\,(y \in A \ \underline{\text{and}}\ \ y > f(n)) \end{cases}$$

- f E' CALCOLABILE PER
    - MINIMALIZZAZIONE
    - RICORSIONE
    - RICORSIVITA' DI A

- VICEVERSA, SIA $A = Ran(f)$, CON $f \in \mathcal{C}_1$ TOTALE E CRESCENTE.
- CHIARAMENTE $f(n) \geq n$, PER OGNI $n \in N$.

QUINDI SI HA:

$$
\begin{aligned}
y \in A &\leftrightarrow y \in Ran(f) \\
&\leftrightarrow (\exists n)(f(n) = y) \\
&\leftrightarrow (\exists n \leq y)(f(n) = y)
\end{aligned}
$$

- POICHE' IL PREDICATO $(\exists n \leq y)(f(n) = y)$ E' DECIDIBILE, NE SEGUE LA RICORSIVITA' DI A. ∎

TEOREMA OGNI INSIEME R.E. INFINITO HA UN SOTTOINSIEME RICORSIVO INFINITO

DIM. - SIA $A = Ran(f)$, CON $f \in C_1$ TOTALE

- PONIAMO

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(n+1) = f(\mu y\,(f(y) > g(n))) \end{cases}$$

- SI HA CHE
  - g E' CALCOLABILE
  - g E' TOTALE
  - g E' CRESCENTE
  - $Ran(g) \subseteq Ran(f)$
- PERTANTO $Ran(g)$ E' UN SOTTOINSIEME RICORSIVO INFINITO DI A. ∎

DEFINIZIONE UNA FUNZIONE f SI DICE FINITA SE TALE È IL SUO DOMINIO ■

NOTA OGNI FUNZIONE FINITA SU $\mathbb{N}^n$ È CALCOLABILE.

NOTAZIONE DATE DUE FUNZIONI f E g PONIAMO $f \subseteq g$ SE $f(x) = g(x)$, PER OGNI $x \in Dom(f)$ ■

TEOREMA (RICE–SHAPIRO)
SIA $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$ TALE CHE L'INSIEME $\{x : \phi_x \in \mathcal{A}\}$ SIA R.E.
ALLORA PER OGNI $f \in \mathcal{C}_1$ VALE:

$f \in \mathcal{A} \longleftrightarrow$ ESISTE UNA FUNZIONE FINITA $\theta \in \mathcal{A}$ TALE CHE $\theta \subseteq f$ ■

COROLLARIO 1

SIA $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$, SE ESISTE $f \in \mathcal{A}$ (CON DOMINIO INFINITO) TALE CHE PER OGNI RESTRIZIONE FINITA $\vartheta \subseteq f$ SI ABBIA $\vartheta \notin \mathcal{A}$, ALLORA $\{x : \phi_x \in \mathcal{A}\}$ NON E' R.E. $\blacksquare$

APPLICAZIONE: L'INSIEME $\{x : \phi_x \text{ E' TOTALE}\}$ NON E' R.E.

INFATTI: SIA $\mathcal{A}_1 = \{f \in \mathcal{C}_1 : f \text{ E' TOTALE}\}$.

- OGNI $f \in \mathcal{A}_1$ HA DOMINIO INFINITO,
- INOLTRE $\mathcal{A}_1$ NON CONTIENE ALCUNA FUNZIONE CON DOMINIO FINITO.

QUINDI, PER IL COROLLARIO 1, $\{x : \phi_x \in \mathcal{A}_1\} = \{x : \phi_x \text{ E' TOTALE}\}$ NON E' R.E. $\blacksquare$

COROLLARIO 2

SIA $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_1$. SE ESISTE UNA FUNZIONE FINITA $\vartheta \in \mathcal{A}$ AVENTE UN'ESTENSIONE CALCOLABILE $f \supseteq \vartheta$ TALE CHE $f \notin \mathcal{A}$, ALLORA $\{x : \phi_x \in \mathcal{A}\}$ NON E' R.E. ■

APPLICAZIONE: L'INSIEME $\{x : \phi_x \text{ NON E' TOTALE}\}$ NON E' R.E.

INFATTI: SIA $\mathcal{A}_2 = \{f \in \mathcal{C}_1 : f \text{ NON E' TOTALE}\}$.
SI CONSIDERI LA FUNZIONE $f_\phi \in \mathcal{C}_1$. OVVIAMENTE $f_\phi \in \mathcal{A}_2$.
INOLTRE PER OGNI FUNZIONE TOTALE $g \in \mathcal{C}_1$ SI HA $f_\phi \subseteq g$ E $g \notin \mathcal{A}_2$.

QUINDI, PER IL COROLLARIO 2, L'INSIEME $\{x : \phi_x \in \mathcal{A}_2\} = \{x : \phi_x \text{ NON E' TOTALE}\}$ NON E' R.E. ■

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE CHE L'INSIEME $\{x : \phi_x$ NON E' INIETTIVA$\}$ E' R.E.

2. PER CIASCUNO DEI SEGUENTI INSIEMI STABILIRE SE
   - E' RICORSIVO
   - E' RICORSIVAMENTE ENUMERABILE
   - HA UN COMPLEMENTO R.E.

   (a) $\{x : x \in E_x\}$

   (b) $\{x : x$ E' UN QUADRATO PERFETTO$\}$

   (c) $\{x : \phi_x$ E' INIETTIVA$\}$

   (d) $\{x : \phi_m(x)\uparrow\}$ (m FISSATO)

3. SI UTILIZZI IL TEOREMA DI RICE-SHAPIRO PER DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PROBLEMI NON SONO PARZ. DECIDIBILI

   (a) "$W_x = \emptyset$" (b) "W_x E' FINITO" (c) "W_x E' INFINITO"

   (d) "$\phi_x = \underline{0}$" (e) "$\phi_x \neq \underline{0}$"