DECIDIBILITÀ, INDECIDIBILITÀ E PARZIALE DECIDIBILITÀ

- RICORDIAMO CHE UN PREDICATO $M(\vec{x})$ È DECIDIBILE SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA

$$c_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } M(\vec{x}) \text{ VALE} \\ 0 & \text{SE } M(\vec{x}) \text{ NON VALE} \end{cases}$$

È CALCOLABILE.

- ALTRIMENTI SI DICE INDECIDIBILE
- ALTRI MODI USATI PER ESPRIMERE CHE UN PREDICATO È DECIDIBILE SONO:

RICORSIVO
RICORSIVAMENTE DECIDIBILE
RISOLVIBILE
RICORSIVAMENTE RISOLVIBILE
CALCOLABILE

HA IL PROBLEMA DELLA DECISIONE RICORSIVO

- UN ALGORITMO PER CALCOLARE c_M E' DETTO PROCEDURA DI DECISIONE

PROBLEMI INDECIBILI NELLA TEORIA DELLA CALCOLABILITA'

<u>TEOREMA</u> IL PROBLEMA "$x \in W_x$" E' INDECIDIBILE

["$\phi_x(x)\downarrow$", "$P_x(x)\downarrow$", "$\Psi_U(x,x)\downarrow$" SONO FORMULAZIONI EQUIVALENTI A "$x \in W_x$"]

<u>DIM</u>. OCCORRE DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in W_x \\ 0 & \text{SE } x \notin W_x \end{cases}$$

NON E' CALCOLABILE.

- PROCEDIAMO PER ASSURDO FACENDO VEDERE CHE SE f FOSSE CALCOLABILE RIUSCIREMMO A COSTRUIRE UNA FUNZIONE CALCOLABILE g <u>DIVERSA</u> DA TUTTE LE FUNZIONI CALCOLABILI !

- SUPPONIAMO PERTANTO CHE f SIA CALCOLABILE
- PONIAMO

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin W_x \\ \uparrow & \text{se } x \in W_x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) = 0 \\ \uparrow & \text{se } f(x) = 1 \end{cases}$$

- PER LA TESI DI CHURCH, g E' CALCOLABILE
- D'ALTRA PARTE,

$$x \in Dom(g) \longleftrightarrow x \notin W_x, \quad \text{PER OGNI } x \in N$$

E QUINDI

$$Dom(g) \neq W_x, \quad \text{PER OGNI } x \in N$$

- NE SEGUE CHE g E' DIVERSA DA TUTTE LE FUNZIONI CALCOLABILI, ASSURDO
- SI CONCLUDE CHE f NON E' CALCOLABILE

TEOREMA ESISTE UNA FUNZIONE CALCOLABILE h TALE CHE I PROBLEMI "$x \in Dom(h)$" E "$x \in Ran(h)$" SONO ENTRAMBI INDECIDIBILI

DIM. SI PONGA

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{SE} \quad x \in W_x \\ \uparrow & \text{SE} \quad x \notin W_x \end{cases}$$

- PER LA TESI DI CHURCH, h E' CALCOLABILE (SI HA ANCHE $h(x) = x \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$)
- PER OGNI x, SI HA

$$x \in Dom(h) \leftrightarrow x \in W_x \leftrightarrow x \in Ran(h)$$

PERTANTO I PROBLEMI "$x \in Dom(h)$" E "$x \in Ran(h)$" SONO INDECIDIBILI ∎

TEOREMA ESISTE UNA FUNZIONE CALCOLABILE h TALE

TEOREMA (PROBLEMA DELLA FERMATA)

IL PROBLEMA "$\phi_x(y)$ E' DEFINITO" E' INDECIDIBILE

DIM. [MEDIANTE RIDUZIONE]

- INFORMALMENTE, IL PROBLEMA "$\phi_x(x)\downarrow$" E' "PIU' FACILE" DEL PROBLEMA "$\phi_x(y)\downarrow$". POICHE' IL PRIMO E' INDECIDIBILE NE SEGUE CHE ANCHE IL SECONDO LO E'.
- PIU' FORMALMENTE, SIA

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \phi_x(y)\downarrow \\ 0 & \text{SE } \phi_x(y)\uparrow \end{cases}$$

- SE g FOSSE CALCOLABILE, LO SAREBBE PURE LA FUNZIONE $f(x) = g(x,x)$, MA f E' LA FUNZIONE CARATTERISTICA DEL PROBLEMA "$\phi_x(x)\downarrow$" E QUINDI <u>NON</u> E' CALCOLABILE. PERTANTO g NON E' CALCOLABILE ∎

LA TECNICA DELLA RIDUZIONE

- SUPPONIAMO DI AVERE DUE PROBLEMI $M_1(\vec{x})$ E $M_2(y_1, \dots, y_n)$
- DICIAMO CHE M_1 E' RIDUCIBILE A M_2 SE ESISTONO FUNZIONI TOTALI CALCOLABILI $k_1(\vec{x}), \dots, k_n(\vec{x})$ TALI CHE

$$M_1(\vec{x}) \longleftrightarrow M_2(k_1(\vec{x}), \dots, k_n(\vec{x})), \text{ PER OGNI } \vec{x}.$$

- SE M_1 E' RIDUCIBILE A M_2, OGNI PROCEDURA DI DECISIONE PER M_2 DA' LUOGO AD UNA PROCEDURA DI DECISIONE PER M_1.
- PERTANTO, SE M_1 E' INDECIDIBILE, ANCHE M_2 DEVE ESSERE INDECIDIBILE.

- PIÙ FORMALMENTE, SE M_2 E' DECIDIBILE, ALLORA LA FUNZIONE $c_{M_2}(y_1, \dots, y_n)$ E' CALCOLABILE.
  QUINDI, ANCHE $c_{M_2}(k_1(\vec{x}), \dots, k_n(\vec{x}))$ E' CALCOLABILE.
  MA $c_{M_1}(\vec{x}) = c_{M_2}(k_1(\vec{x}), \dots, k_n(\vec{x}))$, E QUINDI ANCHE $c_{M_1}(\vec{x})$ RISULTA CALCOLABILE, CIOE' M_1 E' DECIDIBILE

- IL TEOREMA s-m-n E' UNO STRUMENTO MOLTO UTILE PER RIDURRE UN PROBLEMA AD UN ALTRO

TEOREMA IL PROBLEMA "$\phi_x = \underline{0}$" E' INDECIDIBILE

DIM

STRATEGIA

CERCARE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE:

$$x \in W_x \iff \phi_{k(x)} = \underline{0}$$

- PONIAMO

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x \in W_x \\ \uparrow & \text{SE } x \notin W_x \end{cases}$$

- PER LA TESI DI CHURCH (OPPURE OSSERVANDO CHE $f(x,y) = \underline{0}(\psi_U(x,x))$), f E' CALCOLABILE
- QUINDI PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE $f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)$

- PERTANTO

$$x \in W_x \longleftrightarrow f(x,y)=0, \text{ PER OGNI } y$$
$$\longleftrightarrow \phi_{k(x)}(y)=0, \text{ PER OGNI } y$$
$$\longleftrightarrow \phi_{k(x)} = \underline{0}$$

CIOE' IL PROBLEMA INDECIDIBILE $x \in W_x$ E' STATO RIDOTTO AL PROBLEMA $\phi_x = \underline{0}$.

- NE SEGUE CHE ANCHE QUEST'ULTIMO DEVE ESSERE INDECIDIBILE ∎

COROLLARIO IL PROBLEMA "$\phi_x = \phi_y$" E' INDECIDIBILE

DIM.

- SIA $c \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\phi_c = \underline{0}$.
- PERTANTO LA RIDUZIONE

$$\text{"}\phi_x = \underline{0}\text{"} \longleftrightarrow \text{"}\phi_x = \phi_c\text{"}$$

DIMOSTRA CHE ANCHE IL PROBLEMA "$\phi_x = \phi_c$" E' INDECIDIBILE

- IN QUESTO CASO, SI SONO USATE LE FUNZIONI

$$k_1(x) = x$$

$$k_2(x) = c$$

■

TEOREMA SIA $c \in \mathbb{N}$. I SEGUENTI PROBLEMI SONO INDECIDIBILI:

(a) (PROBLEMA DELL' INPUT) "$c \in W_x$"

(b) (PROBLEMA DELL' OUTPUT) "$c \in E_x$"

DIM RIDUCIAMO IL PROBLEMA "$x \in W_x$" AD ENTRAMBI I PROBLEMI (a) E (b), SIMULTANEAMENTE.

- SIA

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{SE} \quad x \in W_x \\ \uparrow & \text{SE} \quad x \notin W_x \end{cases}$$

- PER LA TESI DI CHURCH, f E' CALCOLABILE E QUINDI PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE k TALE CHE

$$f(x,y) = \phi_{k(x)}(y)$$

- QUINDI

$x \in W_x \rightarrow \phi_{k(x)}(y) = y$, PER OGNI y

$\rightarrow W_{k(x)} = E_{k(x)} = \mathbb{N}$

$\rightarrow c \in W_{k(x)}$ E $c \in E_{k(x)}$

$x \notin W_x \rightarrow \phi_{k(x)}(y)\uparrow$, PER OGNI y

$\rightarrow W_{k(x)} = E_{k(x)} = \phi$

$\rightarrow c \notin W_{k(x)}$ E $c \notin E_{k(x)}$

TEOREMA DI RICE

SIA $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}_1$ TALE CHE $\mathcal{B} \neq \emptyset$ E $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}_1$.

ALLORA IL PROBLEMA "$\phi_x \in \mathcal{B}$" E' INDECIDIBILE.

DIM. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE IL PROBLEMA "$\phi_x \in \mathcal{B}$" SIA DECIDIBILE, CIOE' CHE LA FUNZIONE CARATTERISTICA

$$c_{\mathcal{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \phi_x \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{SE } \phi_x \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

SIA CALCOLABILE.

- POSSIAMO SUPPORRE, SENZA PERDITA DI GENERALITA', CHE $f_\emptyset \notin \mathcal{B}$, DOVE $f_\emptyset(x)\uparrow$ PER OGNI $x \in \mathbb{N}$. INFATTI, SE COSI' NON FOSSE, POTREMMO PROCEDERE SOSTITUENDO $\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{B}$ AL POSTO DI $\mathcal{B}$, IN QUANTO $c_{\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{B}} = \overline{sg} \circ c_{\mathcal{B}}$ E' CALCOLABILE.

- SIA QUINDI $g \in \mathcal{B}$ E PONIAMO

$$f(x,y) = \begin{cases} g(y) & \text{SE } x \in W_x \\ \cancel{\uparrow}\, f_\emptyset(y) & \text{SE } x \notin W_x \end{cases}$$

- PER LA TESI DI CHURCH, f E' CALCOLABILE E QUINDI PER IL TEOREMA S-m-n ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE

$$f(x,y) = \phi_{k(x)}(y).$$

- SI OSSERVI CHE

$$x \in W_x \longrightarrow \phi_{k(x)} = g \longrightarrow \phi_{k(x)} \in \mathcal{B}$$

$$x \notin W_x \longrightarrow \phi_{k(x)} = f_\emptyset \longrightarrow \phi_{k(x)} \notin \mathcal{B}$$

- PERTANTO ABBIAMO:

"$x \in W_x$" $\longleftrightarrow$ "$\phi_{k(x)} \in \mathcal{B}$"

CIOE' IL PROBLEMA "$x \in W_x$" E' STATO RIDOTTO AL PROBLEMA "$\phi_x \in \mathcal{B}$".

- QUINDI "$\phi_x \in \mathcal{B}$" NON E' DECIDIBILE, ASSURDO

- IN CONCLUSIONE, L'IPOTESI INIZIALE CHE "$\phi_x \in \mathcal{B}$" FOSSE DECIDIBILE PORTA A CONTRADDIZIONI, E QUINDI "$\phi_x \in \mathcal{B}$" E' INDECIDIBILE $\blacksquare$

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PROBLEMI SONO INDECIDIBILI

(a) "$x \in E_x$"

(b) "$W_x = W_y$" [SI RIDUCA "ϕ_x E' TOTALE" A QUESTO PROBLEMA]

(c) "$\phi_x(x) = 0$"

(d) "$\phi_x(y) = 0$"

(e) "$x \in E_y$"

(f) "ϕ_x E' TOTALE E COSTANTE"

(g) "$W_x = \emptyset$"

(h) "E_x E' INFINITO"

(i) "$\phi_x = g$", CON g UNA QUALSIASI FUNZIONE CALCOLABILE ASSEGNATA

2. DIMOSTRARE CHE NON ESISTE ALCUNA FUNZIONE CALCOLABILE $f(x,y)$ CON LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

"QUANDO $P_z(y)$ SI FERMA LO FA IN AL PIÙ $f(x,y)$ PASSI"

INDECIDIBILITA' IN ALTRE AREE DELLA MATEMATICA

EQUAZIONI DIOFANTEE

SIA $P(x_1, \dots, x_n)$ UN POLINOMIO NELLE VARIABILI $x_1, \dots, x_n$, CON COEFFICIENTI INTERI.
L'EQUAZIONE $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, OVE SI RICERCANO SOLUZIONI INTERE, E' DETTA EQUAZIONE DIOFANTEE

X PROBLEMA DI HILBERT (1900)

ESISTE UN ALGORITMO IN GRADO DI STABILIRE PER OGNI DATA EQUAZIONE DIOFANTEA SE HA SOLUZIONE?

M. DAVIS, J. ROBINSON, H. PUTNAM E Y. MATIYASEVICH HANNO DIMOSTRATO CHE IL X PROBLEMA DI HILBERT HA SOLUZIONE NEGATIVA

LOGICA MATEMATICA

IL PROBLEMA DELLA VALIDITÀ PER LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE È INDECIDIBILE

TEORIA DEI GRUPPI

TEORIA DEGLI INSIEMI

...

PREDICATI PARZIALMENTE DECIDIBILI

- SEBBENE LA FUNZIONE CARATTERISTICA DEL PREDICATO "$x \in W_x$" NON SIA CALCOLABILE, LA SEGUENTE FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in W_x \\ \uparrow & \text{SE } x \notin W_x \end{cases}$$

È CALCOLABILE, PER LA TESI DI CHURCH OPPURE OSSERVANDO CHE $f(x) = \underline{1}(\Psi_U(x, x))$

(FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE PER "$x \in W_x$")

- UN ALGORITMO CHE CALCOLA LA f È UNA PROCEDURA CHE DÀ RISPOSTA CORRETTA SE $x \in W_x$ E CHE NON SI FERMA SE $x \notin W_x$

(PROCEDURA DI SEMI-DECISIONE PER "$x \in W_x$")

DEFINIZIONE UN PREDICATO $M(\vec{x})$ E' PARZIALMENTE DECIDIBILE SE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } M(\vec{x}) \text{ VALE} \\ \uparrow & \text{SE } M(\vec{x}) \text{ NON VALE} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE

ESEMPI

1. IL PROBLEMA DELLA FERMATA E' PARZIALMENTE DECIDIBILE IN QUANTO LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } P_x(y)\downarrow \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE

(PER LA TESI DI CHURCH, OPPURE OSSERVANDO CHE

$$f(x,y) = \mathbf{1}(\psi_U(x,y)))$$

2. OGNI PREDICATO DECIDIBILE E' PARZIALMENTE DECIDIBILE (BASTA OSSERVARE CHE SE LA FUNZIONE CARATTERISTICA $c_M(\vec{x})$ DI UN PREDICATO $M(\vec{x})$ E' CALCOLABILE, ALLORA LA FUNZIONE $c'_M(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } c_M(\vec{x}) = 1 \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ E' CALCOLABILE)

3. SE $g(\vec{x})$ E' UNA FUNZIONE CALCOLABILE, IL PREDICATO "$\vec{x} \in Dom(g)$" E' PARZIALMENTE DECIDIBILE

(BASTA OSSERVARE CHE LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE $f(\vec{x})$ SODDISFA LA RELAZIONE $f(\vec{x}) = \underline{1}(g(\vec{x}))$)

4. IL PROBLEMA "$x \notin W_x$" <u>NON</u> E' PARZIALMENTE DECIDIBILE

(INFATTI, SE f E' LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA, $x \in Dom(f) \leftrightarrow x \notin W_x$, PER CUI $Dom(f) \neq W_x$ PER OGNI $x \in \mathbb{N}$ E QUINDI f NON PUÒ ESSERE CALCOLABILE)

DUE CARATTERIZZAZIONI DEI PREDICATI PARZIALMENTE DECIDIBILI

TEOREMA UN PREDICATO $M(\vec{x})$ E' PARZIALMENTE DECIDIBILE SE E SOLO SE ESISTE UNA FUNZIONE CALCOLABILE $g(\vec{x})$ TALE CHE: $M(\vec{x}) \iff \vec{x} \in Dom(g)$

DIM SE $M(\vec{x})$ E' PARZIALMENTE DECIDIBILE, ALLORA LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE $f(\vec{x})$ E' CALCOLABILE, ED INOLTRE VALE $M(\vec{x}) \iff f(\vec{x})=1 \iff \vec{x} \in Dom(f)$

IL VICEVERSA SEGUE DAL PRECEDENTE ESEMPIO 3. ■

TEOREMA UN PREDICATO $M(\vec{x})$ E' PARZIALMENTE DECIDIBILE SE E SOLO SE ESISTE UN PREDICATO DECIDIBILE $R(\vec{x}, y)$ TALE CHE $M(\vec{x}) \Longleftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$. [RICERCA NON LIMITATA]

DIM SIA $M(\vec{x})$ PARZIALMENTE DECIDIBILE E SIA $f(\vec{x})$ LA SUA FUNZIONE CARATTERISTICA PARZIALE. ALLORA VALE

$$M(\vec{x}) \Longleftrightarrow f(\vec{x})\downarrow \Longleftrightarrow \vec{x} \in Dom(f) \Longleftrightarrow (\exists t) H_n(e, \vec{x}, t)$$

DOVE $f = \phi_e^{(n)}$ E $H_n(e, \vec{x}, t)$ E' IL PREDICATO PRIMITIVO RICORSIVO CHE E' VERO SE SOLO SE $P_e(\vec{x})$ SI FERMA IN AL PIÙ t PASSI

VICEVERSA, SIA $R(\vec{x}, y)$ UN PREDICATO DECIDIBILE TALE CHE $M(\vec{x}) \Longleftrightarrow \exists y R(\vec{x}, y)$.

LA FUNZIONE $\mu y R(\vec{x}, y)$ E' CALCOLABILE E VALE

$$M(\vec{x}) \Longleftrightarrow \underline{1}(\mu y R(\vec{x}, y)) \Longleftrightarrow \vec{x} \in Dom(\lambda \vec{x}. \underline{1}(\mu y R(\vec{x}, y))).$$

POICHE' LA FUNZIONE $\lambda \vec{x}. \underline{1}(\mu y R(\vec{x}, y))$ E' CALCOLABILE, LA TESI SEGUE PER IL TEOREMA PRECEDENTE. ∎

ALTRE PROPRIETÀ DEI PREDICATI PARZIALMENTE DECIDIBILI

TEOREMA SE IL PREDICATO $M(\vec{x}, y)$ È PARZIALMENTE DECIDIBILE, TALE È ANCHE IL PREDICATO $(\exists y) M(\vec{x}, y)$

DIM SIA $R(\vec{x}, y, z)$ UN PREDICATO DECIDIBILE TALE CHE

$$M(\vec{x}, y) \leftrightarrow (\exists z) R(\vec{x}, y, z)$$

ALLORA $(\exists y) M(\vec{x}, y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists z) R(\vec{x}, y, z) \leftrightarrow (\exists w) R(\vec{x}, (w)_1, (w)_2)$.

POICHÉ IL PREDICATO $\lambda \vec{x}, w .\ R(\vec{x}, (w)_1, (w)_2)$ È DECIDIBILE, PER IL TEOREMA PRECEDENTE IL PREDICATO $(\exists y) M(\vec{x}, y)$ È PARZIALMENTE DECIDIBILE. ■

NOTA IL PRECEDENTE TEOREMA ESPRIME IL FATTO CHE I PREDICATI PARZIALMENTE DECIDIBILI SONO CHIUSI RISPETTO ALL'OPERAZIONE DI QUANTIFICAZIONE ESISTENZIALE ■

COROLLARIO SE $M(\vec{x}, y_1, \dots, y_m)$ E' PARZIALMENTE DECIDIBILE, TALE E' ANCHE IL PREDICATO $(\exists y_1) \dots (\exists y_m) M(\vec{x}, y_1, \dots, y_m)$. ∎

ESEMPIO

I SEGUENTI PREDICATI SONO PARZIALMENTE DECIDIBILI

(a) "$x \in E_y^{(n)}$"

DIM "$x \in E_y^{(n)}$" $\longleftrightarrow (\exists z_1) \cdots (\exists z_n)(\exists t)\,(P_y(z_1, \dots, z_n)\downarrow x$ IN AL PIÙ t PASSI)

$\longleftrightarrow (\exists z_1) \cdots (\exists z_n)(\exists t)\; S_n(y, \vec{z}, x, t)$

(b) "$W_x \neq \emptyset$"

DIM "$W_x \neq \emptyset$" $\longleftrightarrow (\exists y)\; y \in W_x \longleftrightarrow (\exists y)(\exists t)\; P_x(y)\downarrow$ IN AL PIÙ t PASSI

$\longleftrightarrow (\exists y)(\exists t)\; H(x, y, t)$

TEOREMA UN PREDICATO $M(\vec{x})$ E' DECIDIBILE SE E SOLO SE SIA $M(\vec{x})$ CHE $\underline{\text{not}}\ M(\vec{x})$ SONO PARZIALMENTE DECIDIBILI

DIM. SE $M(\vec{x})$ E' DECIDIBILE, TALE E' ANCHE $\underline{\text{not}}\ M(\vec{x})$. PERTANTO SIA $M(\vec{x})$ CHE $\underline{\text{not}}\ M(\vec{x})$ RISULTANO ESSERE PARZIALMENTE DECIDIBILI.

VICEVERSA, SUPPONIAMO CHE $M(\vec{x})$ E $\underline{\text{not}}\ M(\vec{x})$ SIANO PARZIALMENTE DECIDIBILI E SIANO c'_M E $c'_{\text{not } M}$ LE RISPETTIVE FUNZIONI CARATTERISTICHE PARZIALI (CALCOLABILI).
INFORMALMENTE, PER CALCOLARE LA FUNZIONE CARATTERISTICA c_M DI $M(\vec{x})$ POSSIAMO ESEGUIRE SIMULTANEAMENTE I PROGRAMMI P_1 E P_2 CHE CALCOLANO c'_M E $c'_{\text{not } M}$, RISPETTIVAMENTE.
SE SI FERMA PRIMA $P_1(\vec{x})$ PONIAMO $c_M(\vec{x})=1$, ALTRIMENTI PONIAMO $c_M(\vec{x})=0$. PER LA TESI DI CHURCH, c_M E' CALCOLABILE ∎

COROLLARIO IL PREDICATO "$x \notin W_x$" NON E' PARZIALMENTE DECIDIBILE

DIM SAPPIAMO CHE IL PREDICATO "$x \in W_x$" E'

- PARZIALMENTE DECIDIBILE
- NON DECIDIBILE

QUINDI, PER IL TEOREMA PRECEDENTE, IL PREDICATO "$x \notin W_x$" NON E' PARZIALMENTE DECIDIBILE. ■

TEOREMA SIA $f(\vec{x})$ UNA FUNZIONE PARZIALE.
ALLORA $f(\vec{x})$ E' CALCOLABILE SE E SOLO SE IL PREDICATO

$$\text{"}f(\vec{x}) = y\text{"}$$

E' PARZIALMENTE DECIDIBILE

DIM. SE f E' CALCOLABILE, ALLORA $f = \phi_e^{(n)}$ PER QUALCHE e.
QUINDI, POICHE'

$$\text{"}f(\vec{x}) = y\text{"} \leftrightarrow (\exists t)\, S_n(e, \vec{x}, y, t),$$

IL PREDICATO "$f(\vec{x}) = y$" E' PARZIALMENTE DECIDIBILE.
VICEVERSA, SUPPONIAMO CHE "$f(\vec{x}) = y$" SIA PARZ. DECIDIBILE E SIA $R(\vec{x}, y, t)$ UN PREDICATO DECIDIBILE TALE CHE

$$\text{"}f(\vec{x}) = y\text{"} \leftrightarrow (\exists t)\, R(\vec{x}, y, t)$$

POICHE' $f(\vec{x})\downarrow \leftrightarrow (\exists y)(\exists t)\, R(\vec{x}, y, t)$, SI HA

$$f(\vec{x}) = (\mu z\, R(\vec{x}, (z)_1, (z)_2))_1$$

DA CUI SEGUE CHE f E' CALCOLABILE. ■

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PREDICATI SONO PARZ. DECIDIBILI

   (a) "$E_x^{(n)} \neq \emptyset$" (n FISSATO)

   (b) "$\phi_x(y)$ E' UN QUADRATO PERFETTO"

   (c) "n E' UN NUMERO DI FERMAT, CIOE' $\exists x, y, z > 0$ TALI CHE $x^n + y^n = z^n$"

2. SIANO $M(\vec{x})$ E $N(\vec{x})$ PREDICATI PARZ. DECIDIBILI.
   DIMOSTRARE CHE "$M(\vec{x})$ and $N(\vec{x})$" E "$M(\vec{x})$ or $N(\vec{x})$" SONO ANCH'ESSI PARZ. DECIDIBILI.
   VERIFICARE INVECE CHE "not $M(\vec{x})$" NON E' IN GENERALE PARZ. DECIDIBILE

3. SUPPONIAMO CHE $M(\vec{x}, y)$ SIA PARZIALMENTE DECIDIBILE

DIMOSTRARE CHE

(a) $(\exists y < z) M(\vec{x}, y)$ E' PARZ. DECIDIBILE

(b) $(\forall y < z) M(\vec{x}, y)$ E' PARZ. DECIDIBILE

(c) $(\forall y) M(\vec{x}, y)$ NON E' NECESSARIAMENTE PARZ. DECIDIBILE

4. SUPPONIAMO CHE $M(x_1, \ldots, x_n)$ SIA PARZ. DECIDIBILE E SIANO $g_1, \ldots, g_m$ FUNZIONI PARZIALI CALCOLABILI.

DIMOSTRARE CHE IL PREDICATO $N(\vec{y}) \equiv M(g_1(\vec{y}), \ldots, g_n(\vec{y}))$ E' PARZ. DECIDIBILE