

ENUMERAZIONE DELLE FUNZIONI CALCOLABILI

TERMINOLOGIA

- UN INSIEME X È ENUMERABILE SE ESISTE UNA BIEZIONE $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ SE INOLTRE f ED f^{-1} SONO ANCHE EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, L'INSIEME X SI DIRÀ EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE
- UN' ENUMERAZIONE DI UN INSIEME X È UNA SURIIEZIONE $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ (RAPPRESENTATA MEDIANTE $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ SE g È ANCHE INIETTIVA, SI DICE ENUMERAZIONE SENZA RIPETIZIONI

TEOREMA

I SEGUENTI INSIEMI SONO EFFETTIVAMENTE ENUMERABILI

(a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(b) $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$

(c) $\bigcup_{k > 0} \mathbb{N}^k$

DIM

(a) - SI CONSIDERI LA BIEZIONE $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ DEFINITA DA

$$\pi(m, n) =_{\text{def}} 2^m (2n + 1) - 1$$

- SI VERIFICA FACILMENTE CHE

$$\pi^{-1}(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x)), \text{ CON}$$

$$\pi_1(x) =_{\text{def}} (x+1)_2$$

$$\pi_2(x) =_{\text{def}} \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2^{\pi_1(x)}} - 1 \right)$$

- E' CHIARO CHE π E π^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI

(b) SI CONSIDERI LA BIEZIONE $\zeta: \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\zeta(m, m, q) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(\pi(m-1, m-1), q-1)$$

SI HA:

$$\zeta^{-1}(x) = (\pi_1(\pi_1(x)) + 1, \pi_2(\pi_1(x)) + 1, \pi_2(x) + 1)$$

ζ E ζ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI

(c) SI CONSIDERI LA BIEZIONE $\tau: \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

$$\tau(a_1, \dots, a_k) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{a_1} + 2^{a_1 + a_2 + 1} + \dots + 2^{a_1 + a_2 + \dots + a_k + k - 1} - 1$$

SIA $x+1 = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_k}$, CON $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k$,

ALLORA $\tau^{-1}(x) = (a_1, \dots, a_k)$, CON

$a_1 = b_1$, $a_{i+1} = b_{i+1} - b_i$ (PER $i = 1, 2, \dots, k-1$)

- τ E τ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI ■

NOTAZIONE

$\mathcal{I} =_{\text{def}}$ INSIEME DI TUTTE LE ISTRUZIONI URM

$\mathcal{P} =_{\text{def}}$ INSIEME DI TUTTI I PROGRAMMI URM

TEOREMA

\mathcal{I} E \mathcal{P} SONO EFFETTIVAMENTE ENUMERABILI

DM. PONIAMO

$$\beta(Z(n)) = 4(n-1)$$

$$\beta(S(n)) = 4(n-1) + 1$$

$$\beta(T(m, n)) = 4\pi(m-1, n-1) + 2$$

$$\beta(J(m, n, q)) = 4\zeta(m, n, q) + 3$$

-SIA $x = 4u + r$, con $0 \leq r < 4$.

-SI HA:

$$\beta^{-1}(x) = \begin{cases} Z(u+1) & SE & r=0 \\ S(u+1) & SE & r=1 \\ T(\pi_1(u)+1, \pi_2(u)+1) & SE & r=2 \\ J(m, n, q) & SE & r=3 \\ & ROVE & (m, n, q) = \beta^{-1}(u) \end{cases}$$

- E' FACILE CONVINCERSI CHE β E β^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, E PERTANTO \mathcal{J} E' EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE

- DEFINIAMO LA BIEZIONE $\gamma: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ COME SEGUE:

- SIA $P \in \mathcal{P}$, SE $P = I_1, I_2, \dots, I_s$, PONIAMO

$$\gamma(P) = \tau(\beta(I_1), \dots, \beta(I_s))$$

- E' FACILE VERIFICARE CHE γ E γ^{-1} SONO EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI E PERTANTO

\mathcal{P} E' EFFETTIVAMENTE ENUMERABILE ■

DEFINIZIONE DATO $P \in \mathcal{P}$, $\gamma(P)$ E' DETTO NUMERO
DI GÖDEL DI P (O CODICE DI P)

INOLTRE PONIAMO:

$$P_m = \gamma^{-1}(m)$$

ESEMPI

(a) SIA $P: T(1,3), S(4), Z(6)$.

SI HA:

$$\beta(T(1,3)) = 4\pi(0,2) + 2 = 4(2^0(2 \cdot 2 + 1) - 1) + 2 = 18$$

$$\beta(S(4)) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$$

$$\beta(Z(6)) = 4 \cdot 5 = 20$$

PERTANTO:

$$\gamma(P) = 2^{18} + 2^{18+13+1} + 2^{18+13+20+2} - 1$$

$$= 2^{18} + 2^{32} + 2^{53} - 1$$

$$= 9007203549970431$$

(b) Sia $n=4127$, CALCOLIAMO P_{4127}

SI HA:

$$4127 = 2^5 + 2^{12} - 1$$

QUINDI $P_{4127} = I_1, I_2$ con

$$\beta(I_1) = 5 = 4 \times 1 + 1$$

$$\beta(I_2) = 12 - 5 - 1 = 6 = 4 \times 1 + 2 = 4\pi(1,0) + 2$$

PERTANTO:

$$I_1 = S(2)$$

$$I_2 = T(2,1)$$

CI OÈ

$$P_{4127} = S(2), T(2,1)$$

ESERCIZI

CALCOLARE

(a) $\beta(J(3,4,2))$

(b) $\beta^{-1}(503)$

(c) $\gamma(T(3,4), S(3), Z(1))$

(d) P_{100}

DEFINIZIONE

PER OGNI $a \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ PONIAMO

(a) $\phi_a^{(n)} =_{\text{def}}$ LA FUNZIONE n -ARIA CALCOLATA DA P_a
(CIOE' LA FUNZIONE $f_{P_a}^{(n)}$)

(b) $W_a^{(n)} =_{\text{def}}$ $\text{Dom}(\phi_a^{(n)})$

(c) $E_a^{(n)} =_{\text{def}}$ $\text{Ran}(\phi_a^{(n)})$

PER $n=1$ SCRIVIAMO: ϕ_a , W_a , E_a AL POSTO

DI $\phi_a^{(1)}$, $W_a^{(1)}$, $E_a^{(1)}$

ESEMPIO

$$P_{4127} = S(2), T(2,1)$$

QUINDI

$$\phi_{4127}(x) = 1, \text{ PER } x \in \mathbb{N}$$

$$\phi_{4127}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_{2+1}, \text{ PER } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}, \text{ SE } n > 1$$

$$W_{4127} = \mathbb{N}, \quad E_{4127} = \{1\}$$

$$W_{4127}^{(n)} = \mathbb{N}^{(n)}, \quad E_{4127}^{(n)} = \mathbb{N}^+, \text{ SE } n > 1$$

- SE f È UNA FUNZIONE UNARIA CALCOLABILE,
 $f = \phi_a$, PER QUALCHE $a \in \mathbb{N}$ (INDICE DI f)

- POICHE' f HA INFINITI INDICI, LA SEQUENZA

$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$

È UNA SEQUENZA CON RIPETIZIONI CHE
CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI UNARIE CALCOLABILI

- ANALOGAMENTE

$\phi_0^{(n)}, \phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots$

È UNA SEQUENZA CON RIPETIZIONI CHE
CONTIENE TUTTE LE FUNZIONI n -ARIE CALCOLABILI

TEOREMA

$\mathcal{C}_n (= \{ \phi_a^{(n)} : a \in \mathbb{N} \})$ È ENUMERABILE

DIM.

DATA L'ENUMERAZIONE CON RIPETIZIONI

$\phi_0^{(n)}, \phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots$

DI \mathcal{C}_n , NE POSSIAMO COSTRUIRE UNA SENZA

RIPETIZIONI

$\phi_{f_n(0)}^{(n)}, \phi_{f_n(1)}^{(n)}, \phi_{f_n(2)}^{(n)}, \dots$

DOVE

$$f_n(0) = 0$$

$$f_n(m+1) = \mu \geq (\phi_{\mu}^{(n)} \notin \{ \phi_{f_n(0)}^{(n)}, \dots, \phi_{f_n(m)}^{(n)} \})$$

COROLLARIO

\mathbb{Q} È ENUMERABILE

DIM.

- POICHE' $\mathbb{Q} = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{Q}_m$ E CIASCUN \mathbb{Q}_m È ENUMERABILE,

SEGUE CHE \mathbb{Q} È ENUMERABILE.

- UN' ENUMERAZIONE ESPLICITA DI \mathbb{Q} SENZA RIPETIZIONI

È LA FUNZIONE $\mathcal{D} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$\mathcal{D} \left(\begin{matrix} \phi^{(m)} \\ f_m^{(m)} \end{matrix} \right) = \pi(m, m-1),$$



METODO DIAGONALE DI CANTOR

DATA UN'ENUMERAZIONE x_0, x_1, x_2, \dots DI OGGETTI
(FUNZIONI OPPURE INSIEMI DI NUMERI NATURALI) E' POSSIBILE
COSTRUIRE UN OGGETTO x DELLA STESSA NATURA
DIVERSO DA TUTTI GLI x_i DELL'ENUMERAZIONE

	0	1	2	3	...
x_0	$x_0(0)$	$x_0(1)$	$x_0(2)$	$x_0(3)$...
x_1	$x_1(0)$	$x_1(1)$	$x_1(2)$	$x_1(3)$...
x_2	$x_2(0)$	$x_2(1)$	$x_2(2)$	$x_2(3)$...
x_3	$x_3(0)$	$x_3(1)$	$x_3(2)$	$x_3(3)$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

- E' SUFFICIENTE COSTRUIRE χ IN MODO TALE CHE

$$\chi(i) \neq \chi_i(i)$$

(SE GLI OGGETTI SONO INSIEMI, $\chi_i(n) = c_{\chi_i}(n)$)

TEOREMA

ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE E UNARIA CHE
NON E' CALCOLABILE

D.M.

PONIAMO:

$$f(n) = \begin{cases} \phi_m(n) + 1 & \text{SE } \phi_m(n) \downarrow \\ 0 & \text{SE } \phi_m(n) \uparrow \end{cases}$$

- SI HA:

$f \neq \phi_m$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$,

E QUINDI f E' BANALMENTE TOTALE E
NON CALCOLABILE

ESERCIZI

1. SIA $f(x, y)$ UNA FUNZIONE TOTALE E CALCOLABILE.
PER $m \in \mathbb{N}$, SIA g_m LA FUNZIONE DEFINITA DA:

$$g_m(y) =_{\text{def}} f(m, y).$$

SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE h TOTALE E CALCOLABILE
TALE CHE $h \neq g_m$, PER OGNI $m \in \mathbb{N}$.

2. SIA f_0, f_1, f_2, \dots UN'ENUMERAZIONE DI FUNZIONI
PARZIALI DA \mathbb{N} IN \mathbb{N} .

SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ TALE CHE
 $\text{Dom}(g) \neq \text{Dom}(f_i)$, PER OGNI $i \in \mathbb{N}$.

3. SIA f UNA FUNZIONE PARZIALE DA \mathbb{N} IN \mathbb{N} E
SIA $m \in \mathbb{N}$,

SI COSTRUISCA UNA FUNZIONE NON CALCOLABILE

g TALE CHE

$$g(x) = f(x), \text{ PER } 0 \leq x \leq m.$$

IL TEOREMA DI PARAMETRIZZAZIONE (S-m-n)

SPIEGAZIONE INTUITIVA

- SIA $f(x, y)$ CALCOLABILE

- DATO $a \in \mathbb{N}$ PONIAMO

$$g_a(y) =_{df} f(a, y)$$

- g_a È CALCOLABILE, QUINDI $g_a = \phi_e$, PER QUALCHE e

- IL TEOREMA DI PARAMETRIZZAZIONE ASSERISCE CHE ESISTE UNA FUNZIONE CALCOLABILE E TOTALE

$x \mapsto k(x)$ TALE CHE

$$g_x = \phi_{k(x)}$$

TEOREMA (S-M-N - FORMA SEMPLICE)

SIA $f(x, y)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE.

ALLORA ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE

$k(x)$ TALE CHE $f(x, y) = \phi_{k(x)}(y)$.

DIM.

SIA F UN PROGRAMMA URM CHE CALCOLA f .

PER OGNI $a \in \mathbb{N}$, SIA Q_a IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$T(1, 2)$

$Z(1)$

$S(1)$

\vdots

$S(1)$

} a VOLTE

F

- IL PROGRAMMA Q_a CALCOLA LA FUNZIONE UNARIA $f(a, y)$
- PONIAMO $k(x) =$ CODICE DEL PROGRAMMA Q_x
- LA FUNZIONE $k(x)$ E'
 - TOTALE
 - EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE
- QUINDI, PER LA TESI DI CHURCH, $k(x)$ E' UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE E, PER COSTRUZIONE, VALE

$$f(x, y) = \Phi_{k(x)}(y)$$

ESEMPI

1. SIA $f(x, y) = y^x$.

PER IL TEOREMA S-M-N ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE

$$\phi_{k(x)}(y) = y^x$$

2. SIA $f(x, y) = \begin{cases} y & \text{SE } y \text{ È UN MULTIPLO DI } x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

POICHÉ $f(x, y)$ È CALCOLABILE, ESISTE $k(x)$ CALCOLABILE TALE CHE $\phi_{k(x)}(y) = f(x, y)$, QUINDI PER OGNI n

$\phi_{k(n)}(y) \downarrow \Leftrightarrow y \text{ È UN MULTIPLO DI } n$

PERTANTO: $W_{k(n)} = n\mathbb{N} = \bar{E}_{k(n)}$

TEOREMA (S-m-n - FORMA GENERALE)

DATI $m, n \geq 1$, ESISTE UNA FUNZIONE TOTALE
CALCOLABILE $S_m^m(z, \vec{x})$ TALE CHE

$$\Phi_z^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi_{S_m^m(z, \vec{x})}^{(m)}(\vec{y})$$

CON $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^m$ E $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{N}^m$.

DIM

PER $i \geq 1$ SIA $Q(i, x)$ IL SEGUENTE PROGRAMMA:

$Z(i)$
 $S(1)$
 \vdots
 $S(1)$ } x VOLTE

(CARICA x NEL REGISTRO R_i)

- FISSATI m ED n DEFINIAMO $S_n^m(z, \vec{x})$ ESSERE IL CODICE DEL SEGUENTE PROGRAMMA:

$T(n, m+n)$
 \vdots
 $T(2, m+2)$
 $T(1, m+1)$

} COPIA R_1, R_2, \dots, R_n IN $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}$

$Q(1, x_1)$
 $Q(2, x_2)$
 \vdots
 $Q(m, x_m)$

} CARICA x_1, x_2, \dots, x_m IN R_1, R_2, \dots, R_m

P_z) PROGRAMMA CON CODICE z

- PER COSTRUZIONE $\Phi_{S_n^m(z, \vec{x})}^{(n)}(\vec{y}) = \Phi_z^{(n+m)}(\vec{x}, \vec{y})$

- INOLTRE, PER LA TESI DI CHURCH, $S_n^m(z, \vec{x})$ E' CALCOLABILE, IN QUANTO ESSA E' EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE
- PERTANTO SI HA LA TESI ■

OSSERVAZIONE

- LE FUNZIONI S_n^m SONO PRIMITIVE RICORSIVE
- LA DIPENDENZA DI S_n^m DA n E' ELIMINABILE, CIOE'

$\forall m, n \geq 1 \quad \exists S^m: \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}$ TALE CHE

$$\Phi_z^{(m+n)}(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi_{S^m(z, \vec{x})}^{(n)}(\vec{y})$$

ESERCIZI

1. DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE TOTALE
CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI n
 $k(n)$ SIA UN INDICE DELLA FUNZIONE $\lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$

2. DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE TOTALE
CALCOLABILE $k(x)$ TALE CHE PER OGNI n

$W_{k(n)} =$ INSIEME DELLE POTENZE n -ESIME PERFETTE

3. SIA $n \geq 1$, DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI UNA FUNZIONE
TOTALE CALCOLABILE $s(x)$ TALE CHE

$$W_{s(x)}^{(n)} = \{ (y_1, \dots, y_m) : y_1 + y_2 + \dots + y_m = x \}$$