ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA'

GÖDEL - HERBRAND - KLEENE (1936)

FUNZIONI RICORSIVE GENERALI ESPRESSE MEDIANTE UN CALCOLO EQUAZIONALE

CHURCH (1936)

LAMBDA CALCOLO

GÖDEL - KLEENE (1936)

FUNZIONI μ-RICORSIVE E FUNZIONI PARZIALI RICORS

TURING (1936)

FUNZIONI CALCOLABILI MEDIANTE "MACCHINE DI TURING"

%.

ALTRI APPROCCI ALLA CALCOLABILITA' 2

POST (1943)

FUNZIONI DEFINITE MEDIANTE SISTEMI DEDUTTIVI CANONICI

MARKOV (1951)

FUNZIONI DEFINITE DA ALGORITMI SU STRINGHE

SHEPERDSON - STURGIS (1963)

FUNZIONI URM - CALCOLABILI

RISULTATO FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELLA CALCOLABILITÀ

TUTTE LE PROPOSTE PRECEDENTI CARATTERIZZANO LA MEDESIMA CLASSE DI FUNZIONI CALCOLABILI

FUNZIONI PARZIALMENTE RICORSIVE

DEFINIZIONE LA CLASSE $\mathcal{R}$ DELLE FUNZIONI PARZIALI RICORSIVE E' LA PIÙ PICCOLA FAMIGLIA DI FUNZIONI PARZIALI CHE

- CONTIENE LE FUNZIONI INIZIALI

  $\underline{0}$, $x+1$, U_i^m

- E' CHIUSA RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI
  - SOSTITUZIONE
  - RICORSIONE
  - MINIMALIZZAZIONE

OSSERVAZIONE:

GÖDEL E KLEENE INIZIALMENTE HANNO STUDIATO LA CLASSE $\mathcal{R}_0$ DELLE FUNZIONI μ-RICORSIVE DEFINITA COME $\mathcal{R}$ CON LA DIFFERENZA CHE LA MINIMALIZZAZIONE μ E' CONSENTITA SOLO QUANDO PRODUCE FUNZIONI TOTALI.

FAREMO VEDERE CHE

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cap TOT$$

CON TOT FAMIGLIA DELLE FUNZIONI TOTALI

TEOREMA

$$\mathcal{R} = \mathcal{C}_{URM}$$

DIM

- PER QUANTO PRECEDENTEMENTE VISTO SI HA

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}_{URM}$$

- VICEVERSA, SIA $f(\vec{x})$ UNA FUNZIONE URM-CALCOLABILE E SIA $P = I_1, I_2, \ldots, I_s$ UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x})$
- POSSIAMO SUPPORRE, SENZA PERDERE IN GENERALITÀ, CHE
  (a) P SIA IN FORMA STANDARD
  (b) SE I_j È L'ISTRUZIONE $J(m, n, q)$, ALLORA $q \neq j+1$, PER $j = 1, 2, \ldots, s-1$
- SI CONSIDERINO LE SEGUENTI FUNZIONI COLLEGATE ALLE COMPUTAZIONI DI P

- DATO UNO STATO $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3, \dots)$ DEI REGISTRI, IN CUI AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI REGISTRI PUÒ CONTENERE VALORI DIVERSI DA ZERO, ESSO PUÒ ESSERE CODIFICATO IN MANIERA EFFETTIVA CON $cod(\vec{r}) = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot \dots = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{r_i}$
- QUINDI UNA CONFIGURAZIONE $(j, \vec{r})$ PUÒ ESSERE CODIFICATA CON $\pi(j, cod(\vec{r}))$
- DATO IL PROGRAMMA P, INDICHIAMO CON $c_p(\vec{x}, t)$ LA CODIFICA DELLA CONFIGURAZIONE DELLA COMPUTAZIONE $P(\vec{x})$ DOPO t PASSI.
- LA FUNZIONE $c_p(\vec{x}, t)$ E' <u>PRIMITIVA RICORSIVA</u>

$$\begin{cases} c_p(\vec{x}, 0) = \pi(1, 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}) \\ \\ c_p(\vec{x}, t+1) = \pi(j, st) \end{cases}$$

DOVE j E st SONO DEFINITI NEI LUCIDI SEGUENTI.

PER COMODITA', USEREMO LE SEGUENTI NOTAZIONI

$j_p(\vec{x}, t) = \pi_1(c_p(\vec{x}, t))$ (CONTATORE DI PROGRAMMA DOPO t PASSI)

$st_p(\vec{x}, t) = \pi_2(c_p(\vec{x}, t))$ (STATO DEI REGISTRI DOPO t PASSI)

$$
j = \begin{cases}
j_p(\vec{x},t)+1 & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) < s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } \begin{cases} Z(n) \\ S(n) \\ T(m,n) \end{cases} \\
& \text{OPPURE} \\
& \bullet \text{ L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m \neq (st_p(\vec{x},t))_n \\
q & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{, L'ISTRUZIONE } \\
& I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \text{, CON } 1 \le q \le s, \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m = (st_p(\vec{x},t))_n \\
0 & \text{- ALTRIMENTI, CIOE'} \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } \begin{cases} Z(n) \\ S(n) \\ T(m,n) \end{cases} \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = s \text{, L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m \neq (st_p(\vec{x},t))_n \\
& \bullet \text{ SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{, } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \text{, CON } q = s+1, \\
& \text{E } (st_p(\vec{x},t))_m = (st_p(\vec{x},t))_n \\
& \bullet \text{ SE } j_p(\vec{x},t) = 0
\end{cases}
$$

$$
st = \begin{cases}
qt\left(p_n^{(st_p(\vec{x},t))_n},\ st_p(\vec{x},t)\right) & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } Z(n) \\
p_n \cdot st_p(\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } S(n) \\
qt\left(p_n^{(st_p(\vec{x},t))_n},\ st_p(\vec{x},t)\right) \cdot p_n^{(st_p(\vec{x},t))_m} & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } T(m,n) \\
st_p(\vec{x},t) & \text{- SE } 1 \le j_p(\vec{x},t) \le s \text{ E L'ISTRUZIONE } I_{j_p(\vec{x},t)} \text{ E' } J(m,n,q) \text{ OPPURE } j_p(\vec{x},t) = 0
\end{cases}
$$

- SE $f_p(\vec{x})\downarrow$, ALLORA $P(\vec{x})$ SI FERMA ESATTAMENTE DOPO t_0 PASSI, DOVE

$$t_0 = \mu t\,(j_p(\vec{x}, t) = 0)$$

E IN TAL CASO SI HA:

$$f_p(\vec{x}) = (st_p(\vec{x}, t_0))_1$$

- SE $f_p(\vec{x})\uparrow$, ALLORA LA COMPUTAZIONE $P(\vec{x})$ DIVERGE, E SI HA:

$$\mu t\,(j_p(\vec{x}, t) = 0)\uparrow$$

- PERTANTO, VALE LA SEGUENTE RELAZIONE

$$f(\vec{x}) = f_p(\vec{x}) = (st_p(\vec{x}, \mu t\,(j_p(\vec{x}, t) = 0)))_1$$

CIOE': $f(\vec{x}) = (\pi_2(c_p(\vec{x}, \mu t\,(\pi_1(c_p(\vec{x}, t)) = 0))))_1$

DA CUI SEGUE CHE $f_p(\vec{x})$ E' <u>PARZIALE RICORSIVA</u>

- QUINDI SI HA $\mathcal{C}_{URM} \subseteq \mathcal{R}$, E QUEST'ULTIMA IMPLICA $\mathcal{C}_{URM} = \mathcal{R}$. ■

COROLLARIO

$$R_0 = R \cap TOT$$

DIM

- ABBIAMO GIÀ OSSERVATO CHE VALE $R_0 \subseteq R \cap TOT$.
- SIA $f(\vec{x}) \in R \cap TOT$.
- QUINDI $f(\vec{x}) \in \mathcal{C}_{URM}$ E SIA P UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x})$
- SI CONSIDERI LA FUNZIONE $c_p(\vec{x}, t)$.
- POICHÉ $f(\vec{x})\downarrow \iff \mu t\,(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)\downarrow$ E $f(\vec{x})$ È TOTALE, $\mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)$ È TOTALE E QUINDI $\mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)$ APPARTIENE A R_0
- MA $f(\vec{x}) = \left(\pi_2(c_p(\vec{x}, \mu t(\pi_1(c_p(\vec{x},t)) = 0)))\right)_1$, E QUINDI $f(\vec{x}) \in R_0$.

$\blacksquare$

ANALISI DI TURING DELLA CALCOLABILITÀ

- ALAN TURING, ANALIZZANDO IL PROCESSO DI CALCOLO EFFETTIVO CONCLUSE CHE ESSO PUÒ ESSERE CONSIDERATO

UNA SEQUENZA DI OPERAZIONI ELEMENTARI DEI SEGUENTI TIPI

- SCRITTURA DI UN SIMBOLO
- CANCELLAZIONE DI UN SIMBOLO
- TRASFERIMENTO DELL'ATTENZIONE DA UN SIMBOLO AD UN ALTRO

ANALISI DI TURING DELLA CALCOLABILITÀ 2

LA SCELTA DELL'OPERAZIONE DA ESEGUIRE AL PASSO SUCCESSIVO DIPENDE SOLTANTO DA

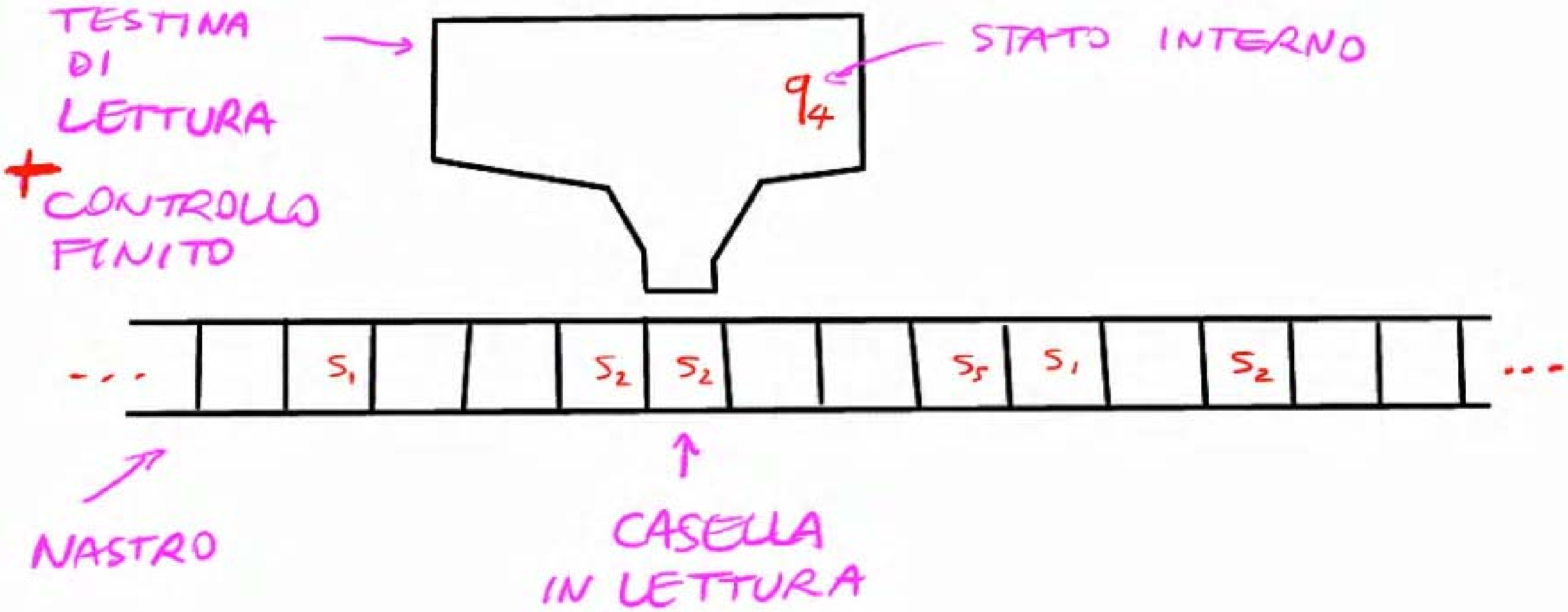
- SIMBOLO CHE SI STA LEGGENDO
- STATO CORRENTE

INOLTRE SI SUPPONE CHE SIA IL NUMERO DI SIMBOLI, SIA IL NUMERO DEGLI STATI SIANO FINITI, IN QUANTO LE CAPACITÀ DI UN ESECUTORE SONO FINITE

MACCHINE DI TURING

HARDWARE

- NASTRO INFINITO SUDDIVISO IN CASELLE CIASCUNA DELLE QUALI PUÒ CONTENERE UN SINGOLO SIMBOLO TRATTO DA UNA LISTA FINITA DI SIMBOLI $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ DETTA ALFABETO DELLA MACCHINA, DOVE s_0 E' IL BLANK
- TESTINA DI LETTURA/SCRITTURA
- UNITA' DI CONTROLLO SPECIFICATA DA UN INSIEME FINITO DI QUADRUPLE


TESTINA DI LETTURA
+ CONTROLLO FINITO
STATO INTERNO
q4
s1
s2
s2
s5
s1
s2
NASTRO
CASELLA IN LETTURA

OPERAZIONI ELEMENTARI AMMESSE

- CANCELLARE IL SIMBOLO IN LETTURA E SOSTITUIRLO CON UN ALTRO SIMBOLO DELL'ALFABETO
- SPOSTARE LA TESTINA DI UNA POSIZIONE A SINISTRA
- SPOSTARE LA TESTINA DI UNA POSIZIONE A DESTRA
- CAMBIARE LO STATO INTERNO DELLA MACCHINA SCEGLIENDO DA UNA LISTA FINITA $q_1, q_2, \dots, q_m$ DETTA INSIEME DEGLI STATI INTERNI DELLA MACCHINA IN BASE ALLE SPECIFICHE DELLA MACCHINA

- UNA MACCHINA M CON ALFABETO $\{s_1, \dots, s_n\}$ ED INSIEME DI STATI $\{q_1, \dots, q_m\}$ E' SPECIFICATA DA UN INSIEME FINITO DI QUADRUPLE DEL TIPO

$$q_i \, s_j \, s_k \, q_l$$

$$q_i \, s_j \, R \, q_l$$

$$q_i \, s_j \, L \, q_l$$

CON $0 \leq j, k \leq n$, $1 \leq i, l \leq m$

ED $R, L \notin \{s_0, s_1, \dots, s_k\} \cup \{q_1, \dots, q_m\}$.

- SUPPORREMO CHE PER OGNI q_i E s_j, LA MACCHINA M POSSIEDA AL PIU' UNA QUADRUPLA CHE INIZIA CON $q_i s_j$

(DETERMINISMO)

AZIONE SPECIFICATA DALLA QUADRUPLA $q_i s_j \alpha q_l$ SU UNA MACCHINA DI TURING M CHE

- SI TROVA NELLO STATO q_i
- SCANDISCE IL SIMBOLO s_j

---

1. $\alpha = s_k \Longrightarrow$ SOSTITUISCE s_k AL POSTO DI s_j

   $\alpha = R \Longrightarrow$ SPOSTA LA TESTINA DI LETTURA A DESTRA

   $\alpha = L \Longrightarrow$ SPOSTA LA TESTINA DI LETTURA A SINISTRA

2. PASSA NELLO STATO INTERNO q_l

- IN GENERALE UNA COMPUTAZIONE DI UNA MACCHINA DI TURING A PARTIRE DA UNA CONFIGURAZIONE INIZIALE (NASTRO + POSIZIONE TESTINA + STATO INIZIALE) E' SPECIFICATA COME SEGUE:

- SINO A QUANDO ESISTE UNA QUADRUPLA DEL TIPO $q_i \, s_j \, \alpha \, q_\ell$, DOVE
  - q_i E' LO STATO INTERNO CORRENTE
  - s_j E' IL SIMBOLO SCANDITO

  SI ESEGUA L' AZIONE SPECIFICATA DALLA QUADRUPLA (SI NOTI CHE SE ESISTE, TALE QUADRUPLA E' UNICA)
- ALTRIMENTI LA COMPUTAZIONE SI FERMA

ESEMPIO

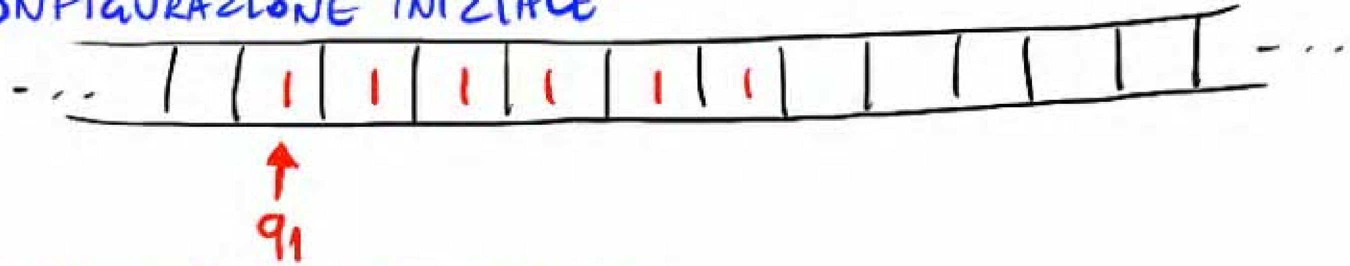
$M:$ $q_1\ 0\ R\ q_1$
$q_1\ 1\ 0\ q_2$
$q_2\ 0\ R\ q_2$
$q_2\ 1\ R\ q_1$

ALFABETO DI $M = \{0, 1\}$

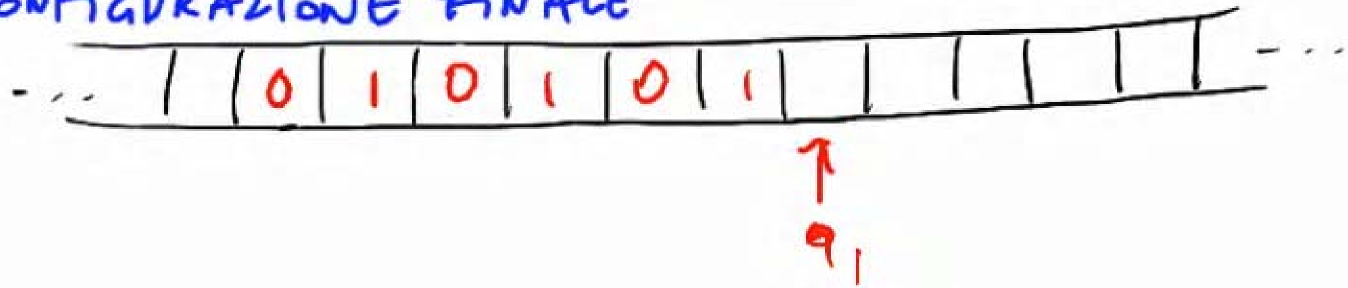
STATI DI $M = \{q_1, q_2\}$

STATO INIZIALE $= q_1$

CONFIGURAZIONE INIZIALE



CONFIGURAZIONE FINALE

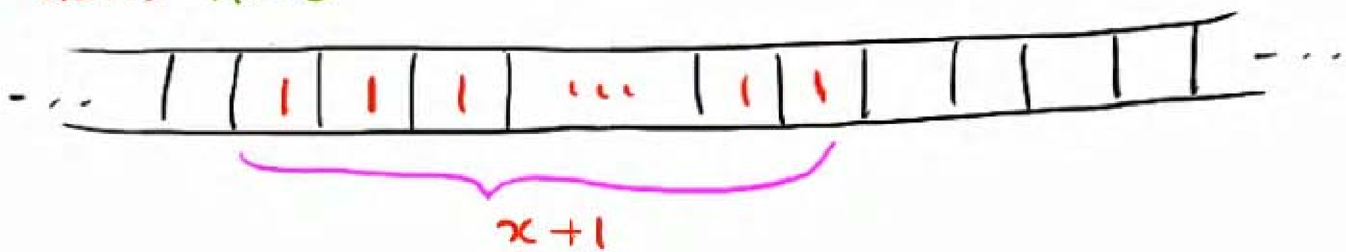


FUNZIONI TURING-CALCOLABILI

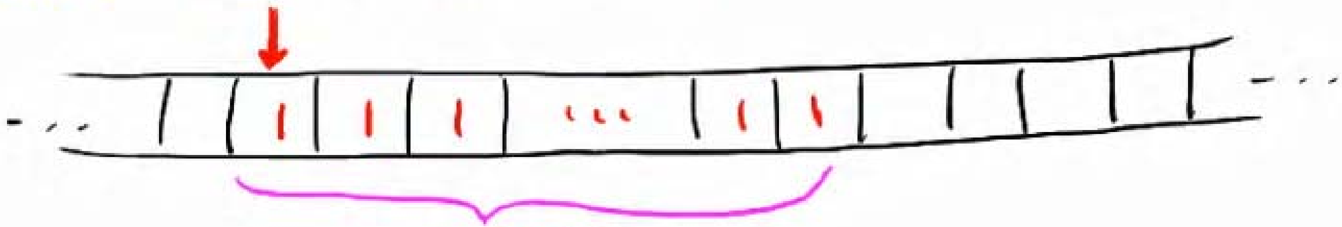
- OCCORRE CONVENIRE COME RAPPRESENTARE I NUMERI NATURALI
- ADOTTEREMO LA SEGUENTE CONVENZIONE:
  - SUPPONIAMO CHE $s_1 \equiv 1$
  - USEREMO IL SIMBOLO **1** COME UN'ASTA NELLA NUMERAZIONE UNARIA

ESEMPIO

IL NUMERO x SARÀ RAPPRESENTATO MEDIANTE $(x+1)$ ASTE



- LA FUNZIONE PARZIALE $f_M(x)$ CALCOLATA DA M E' DEFINITA COME SEGUE:
  - SI CONSIDERI LA COMPUTAZIONE DI M A PARTIRE DALLA CONFIGURAZIONE



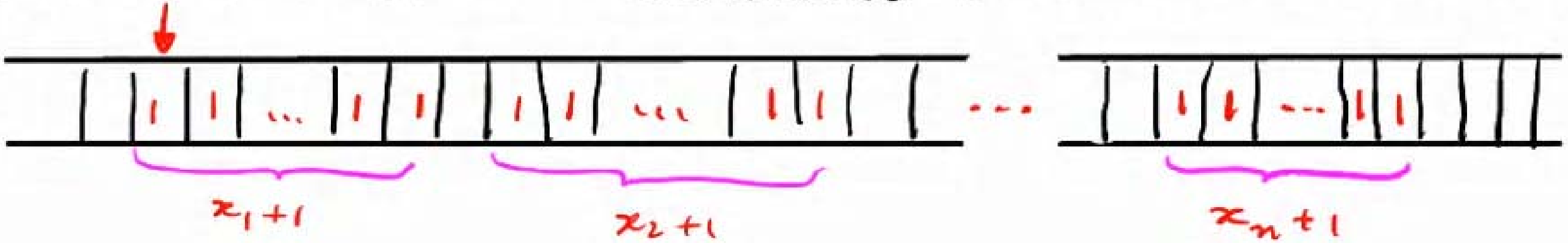
$x+1$

CON M NELLO STATO q_1 E LA TESTINA POSIZIONATA SULLA CASELLA INDICATA DALLA FRECCIA

- QUINDI

$$f_M(x) = \begin{cases} \text{NUMERO DELLE OCCORRENZE DEL SIMBOLO } 1 \\ \quad \text{PRESENTI SUL NASTRO ALLA FINE DELLA} \\ \quad \text{COMPUTAZIONE, SE } M \text{ SI ARRESTA} \\ \uparrow \qquad\qquad \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA FUNZIONE PARZIALE n-ARIA $f_M(x_1, \dots, x_n)$ CALCOLATA DA M SI DEFINISCE IN MANIERA SIMILE, MA A PARTIRE DALLA CONFIGURAZIONE INIZIALE DI NASTRO:



ESEMPIO

- SIA M: $q_1\ 0\ R\ q_1$ ALFABETO DI $M = \{0, 1\}$
$q_1\ 1\ 0\ q_2$ STATI DI $M = \{q_1, q_2\}$
$q_2\ 0\ R\ q_2$
$q_2\ 1\ R\ q_1$

- LA FUNZIONE UNARIA CALCOLATA DA M E'

$$f(x) = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil$$

- IN GENERALE, LA FUNZIONE n-ARIA CALCOLATA DA M E'

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left\lceil \frac{x_1}{2} \right\rceil + x_2 + \dots + x_n + n - 1$$

DEFINIZIONE

UNA FUNZIONE PARZIALE SI DICE TURING-CALCOLABILE SE ESISTE UNA MACCHINA DI TURING CHE LA CALCOLA.

LA FAMIGLIA DELLE FUNZIONI TURING-CALCOLABILI SI INDICA CON $\mathcal{C}_{TUR}$

ESEMPIO

LA FUNZIONE $x+y$ E' TURING - CALCOLABILE

- SI CONSIDERI LA SEGUENTE MACCHINA DI TURING M

$$M: \begin{array}{l} q_1 \, 1 \, B \, q_1 \\ q_1 \, B \, R \, q_2 \\ q_2 \, 1 \, B \, q_3 \\ q_2 \, B \, R \, q_2 \end{array}$$

- E' FACILE VERIFICARE CHE M CALCOLA $x+y$

$$f_M^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad , \quad f_M^{(1)}(x_1) = \begin{cases} x_1 - 1 & \text{SE } x_1 \geq 1 \\ \uparrow & \end{cases}$$

$$f_M^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_m + m - 2 \text{, PER } m \geq 2$$

TEOREMA

$$\mathcal{C}_{URM} = \mathcal{R} = \mathcal{C}_{TUR}$$

(SI DIMOSTRA MEDIANTE SIMULAZIONE)

ESERCIZIO

DARE LA SPECIFICA DI MACCHINE DI TURING CHE CALCOLINO LE FUNZIONI

(a) $x \dot{-} 1$

(b) $2x$

(c) $3x + 2$

VARIANTI DELLE MACCHINE DI TURING

- DIVERSE CONVENZIONI DI INPUT/OUTPUT E DI FERMATA
- USO DI PIÙ NASTRI
- USO DI PIÙ TESTINE DI LETTURA SULLO STESSO NASTRO
- MACCHINE NON-DETERMINISTICHE

....

E' STATO DIMOSTRATO CHE TUTTE LE VARIANTI DI MACCHINE DI TURING STUDIATE SONO COMPUTAZIONALMENTE EQUIVALENTI

TESI DI CHURCH

LA CLASSE DELLE FUNZIONI INTUITIVAMENTE CALCOLABILI COINCIDE CON LA CLASSE $\mathcal{C}_{URM}$ DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI

A SUPPORTO DELLA TESI DI CHURCH

- TEOREMA FONDAMENTALE DELLA CALCOLABILITA'
- COLLEZIONE DELLE FUNZIONI PER LE QUALI ESISTE UNA DIMOSTRAZIONE DI APPARTENENZA A $\mathcal{C}_{URM}$
- POSSIBILITA' DI SIMULARE EFFETTIVAMENTE I PROGRAMMI URM
- MANCANZA DI CONTROESEMPI DI FUNZIONI EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI MA NON URM-CALCOLABILI

- UTILIZZEREMO LA TESI DI CHURCH PER CONCLUDERE CHE UNA DATA FUNZIONE PER LA QUALE SIA DISPONIBILE UN ALGORITMO INFORMALE DI CALCOLO E' CALCOLABILE
- IN TALI SITUAZIONI PARLEREMO DI DIMOSTRAZIONI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH
- E' SOTTINTESO CHE, QUALORA VENGA RICHIESTO, SI DEBBA ESSERE IN GRADO DI DARE UNA DIMOSTRAZIONE FORMALE DI CALCOLABILITA'

ESEMPIO 1

SIA P UN PROGRAMMA URM.
SI DEFINISCA LA FUNZIONE

$$f(x,y,t) = \begin{cases} 1 & \text{SE } P(x)\downarrow y \text{ IN AL PIÙ } t \text{ PASSI DI COMPUTAZIONE} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

- UN ALGORITMO INFORMALE PER CALCOLARE f E' IL SEGUENTE:
  - SI SIMULI P PER t PASSI CON INPUT x
  - SE P SI FERMA E IL CONTENUTO DI R_1 E' UGUALE A y SI RESTITUISCA IL VALORE 1
  - ALTRIMENTI SI RESTITUISCA IL VALORE 0

- POICHÉ L'ALGORITMO DATO È EFFETTIVO, PER LA TESI DI CHURCH POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA FUNZIONE f È URM-CALCOLABILE

- UNA DIMOSTRAZIONE FORMALE DELLA CALCOLABILITÀ DI f SEGUE DALLA SEGUENTE DEFINIZIONE:

$$f(x,y,t) = \begin{cases} 1 & \text{SE } \pi_1(c_p(x,t)) = 0 \wedge (\pi_2(c_p(x,t)))_1 = y \\ 0 & \text{ALTRIMENTI,} \\ & \text{CIOÈ SE } \neg(\pi_1(c_p(x,t)) = 0 \wedge (\pi_2(c_p(x,t)))_1 = y) \end{cases}$$

ESEMPIO 2

SUPPONIAMO CHE f E g SIANO FUNZIONI UNARIE URM-CALCOLABILI.
ALLORA LA FUNZIONE

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in Dom(f) \cup Dom(g) \\ \text{INDEF.} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' URM-CALCOLABILE.

- SI ESEGUANO IN PARALLELO I PROGRAMMI PER CALCOLARE $f(x)$ E $g(x)$
- NON APPENA IL PRIMO PROGRAMMA SI FERMA, SI INTERROMPA LA SIMULAZIONE E SI RESTITUISCA IL VALORE 1

TALE ALGORITMO CALCOLA EFFETTIVAMENTE LA FUNZIONE h E PERTANTO, PER LA TESI DI CHURCH, h E' URM-CALCOLAB.

ESERCIZI

1. SUPPONENDO CHE f E g SIANO FUNZIONI EFFETTIVAMENTE CALCOLABILI, SI DIMOSTRI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH CHE LA FUNZIONE

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{SE } x \in Dom(f) \cap Dom(g) \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' URM- CALCOLABILE

2. SUPPONENDO CHE LA FUNZIONE f SIA UNA FUNZIONE TOTALE EFFETTIVAMENTE CALCOLABILE, SI DIMOSTRI MEDIANTE LA TESI DI CHURCH CHE LA SEGUENTE FUNZIONE E' URM- CALCOLABILE

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in Ran(f) \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$