MINIMALIZZAZIONE

- MEDIANTE PROGRAMMI URM E' POSSIBILE EFFETTUARE LA RICERCA DEL PIÙ PICCOLO INDICE PER CUI SI VERIFICA UNA CERTA CONDIZIONE.
  SE TALE INDICE NON ESISTE LA RICERCA PUÒ ANDARE AVANTI ALL'INFINITO.

- LA MINIMALIZZAZIONE (NON LIMITATA) CONSENTE DI DEFINIRE UNA FUNZIONE $g(\vec{x})$ A PARTIRE DA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ PONENDO

$$g(\vec{x}) =_{def} \text{minimo } y \text{ tale che } f(\vec{x}, y) = 0$$

- SE $f(\vec{x}, y)$ FOSSE CALCOLABILE, UN MODO PER CALCOLARE $g(\vec{x})$ CONSISTE NEL CALCOLARE $f(\vec{x}, 0), f(\vec{x}, 1), f(\vec{x}, 2), \ldots$ FINO A TROVARE IL PRIMO y TALE CHE $f(\vec{x}, y) = 0$
- CHE COSA SUCCEDE SE
  - $f(\vec{x}, y) \neq 0$, PER OGNI y, OPPURE
  - ESISTE z TALE CHE
    - $f(\vec{x}, z)\uparrow$
    - $f(\vec{x}, w) \neq 0$, PER OGNI $w < z$?
- IN ENTRAMBI I CASI CONVENIAMO CHE $g(\vec{x})$ SIA NON DEFINITA

<u>DEFINIZIONE</u>

- DATA UNA FUNZIONE $f(\vec{x}, y)$ (ANCHE PARZIALE) PONIAMO

$$\mu y \left(f(\vec{x},y)=0\right) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE} \\ \quad \bullet\ f(\vec{x},z)\downarrow \ \text{ PER OGNI } \ z\le y \\ \quad \bullet\ f(\vec{x},y)=0 \\ \quad \text{SE UN SIFFATTO } y \text{ ESISTE} \\ \uparrow \qquad \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

- μ E' DETTO OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE ■

- L'INSIEME $\mathcal{C}_{URM}$ E' CHIUSO RISPETTO ALL'OPERAZIONE DI MINIMALIZZAZIONE

TEOREMA

SE $f(\vec{x}, y)$ E' CALCOLABILE, LA FUNZIONE $g(\vec{x}) = \mu y \, (f(\vec{x}, y) = 0)$ E' CALCOLABILE.

DIM SIA $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

SIA F UN PROGRAMMA CHE CALCOLA $f(\vec{x}, y)$

SIA $m = \max(n+1, \rho(F))$.

IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA $g(\vec{x})$:

$T(1, m+1)$

$\vdots$

$T(n, m+n)$

I_p: $R_1 \leftarrow f_F(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+1})$

$J(1, m+n+2, q)$

$S(m+n+1)$

$J(1, 1, p)$

I_q: $T(m+n+1, 1)$ ■

COROLLARIO

SIA $R(\vec{x}, y)$ UN PREDICATO DECIDIBILE.

ALLORA LA FUNZIONE

$$g(\vec{x}) = \mu y \, R(\vec{x}, y) = \begin{cases} \text{MINIMO } y \text{ TALE CHE } R(\vec{x}, y) \text{ E' VERO} \\ \uparrow \qquad \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE.

DIM.

E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE:

$$g(\vec{x}) = \mu y (\overline{sg}(c_R(\vec{x}, y)) = 0). \quad \blacksquare$$

- L'OPERATORE μ CONSENTE DI DERIVARE FUNZIONI NON TOTALI A PARTIRE DA FUNZIONI TOTALI
- SI CONSIDERI IL SEGUENTE ESEMPIO:

SIA $f(x,y) = |x - y^2|$

PONIAMO $g(x) = \mu y \, (f(x,y) = 0)$

SI VERIFICA FACILMENTE CHE:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{SE } x \text{ E' UN QUADRATO PERFETTO} \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

ESERCIZI

(1) SIA $f(x)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE, TOTALE E INIETTIVA.
SI DIMOSTRI CHE ANCHE f^{-1} E' CALCOLABILE

(2) SIA $p(x)$ UN POLINOMIO A COEFFICIENTI IN $\mathbb{Z}$.
SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$$f(z) = \text{"minimo } y \in \mathbb{N} \text{ tale che } p(y) - z = 0\text{"}$$

E' CALCOLABILE

(3) SI DIMOSTRI CHE LA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} x/y & \text{SE } y \neq 0 \text{ E } y \mid x \\ \uparrow & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE

FUNZIONE DI ACKERMANN

- SI CONSIDERI LA SEGUENTE DEFINIZIONE PER RICORSIONE:

$$\begin{cases} \psi(0,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE} \quad y=0 \\ 2 & \text{SE} \quad y=1 \\ y+2 & \text{SE} \quad y>1 \end{cases} \\ \psi(x,0) = 1 \\ \psi(x+1,y+1) = \psi(x, \psi(x+1,y)) \end{cases}$$

- CON LA NOTAZIONE $\psi_x(y) \equiv \psi(x,y)$ ABBIAMO:

$$\psi_{x+1}(y+1) = \psi_x(\psi_{x+1}(y)) = \psi_x(\psi_x(\psi_{x+1}(y-1))) = \psi_x^{(2)}(\psi_{x+1}(y-1))$$

$$= \psi_x^{(3)}(\psi_{x+1}(y-2)) = \dots = \psi_x^{(y+1)}(\psi_{x+1}(0)) = \psi_x^{(y+1)}(1).$$

- ALLA LUCE DEI CASI BASE, CHE CI CONSENTONO DI CALCOLARE
  - $\psi_0(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$
  - $\psi_x(0)$, PER OGNI $x \in \mathbb{N}$

  LA RELAZIONE $\psi_{x+1}(y+1) = \psi_x^{(y+1)}(1)$ CI CONSENTE DI AFFERMARE CHE SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE

  $\psi_1(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$

  $\psi_2(y)$, PER OGNI $y \in \mathbb{N}$

  $\vdots$

  CIOE' SIAMO IN GRADO DI CALCOLARE $\psi_x(y)$, PER OGNI $x \in \mathbb{N}$ E $y \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	$\cdot$
0	1	1	1	1	1	$\cdot$
1	2	2	2	2	2	$\cdot$
2	4	$2\cdot 2$	2^2	2^2	2^2	$\cdot\cdot$
3	5	$2\cdot 3$	2^3	2^{2^2}	$2^{2^{2^2}}$	$\cdot\cdot$
4	6	$2\cdot 4$	2^4	$2^{2^{2^2}}$	$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$	$\cdot$
5	7	$2\cdot 5$	2^5	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$
6	8	$2\cdot 6$	2^6	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot$
7	9	$2\cdot 7$	2^7	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot$

$$\psi_4(4) = \psi_3(\psi_4(3)) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}\right\} \psi_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 2^{16}$$

$$\psi_4(3) = \psi_3(\psi_4(2)) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}\right\} \psi_4(2) = 4$$

$$\psi_4(2) = \psi_3(\psi_4(1)) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\} \psi_4(1) = 2$$

$$\psi_4(1) = \psi_3(\psi_4(0)) = \psi_3(1) = 2$$

CALCOLABILITÀ DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN

- DICIAMO CHE UN INSIEME S DI TRIPLE È VALIDO SE
  - È COSTITUITO DA TRIPLE (x, y, z) TALI CHE $z = \psi(x, y)$ ED INOLTRE
  - PER OGNI $(x, y, z) \in S$, S CONTIENE TUTTE LE TRIPLE $(x_1, y_1, \psi(x_1, y_1))$ NECESSARIE AL CALCOLO DI $\psi(x, y)$.

ESEMPIO

SE $(2,2,4) \in S$, ALLORA POICHÈ

$$\psi(2,2) = \psi(1, \psi(\underline{2,1})) = \psi(\underline{1,2}) = \psi(0, \psi(2,1)) = \psi(\underline{0,2}) = 4$$

$$\psi(2,1) = \psi(1, \psi(\underline{2,0})) = \psi(\underline{1,1}) = \psi(0, \psi(\underline{1,0})) = \psi(\underline{0,1}) = 2$$

SI HA: $(2,1,2), (1,2,4), (0,2,4), (2,0,1), (1,1,2), (1,0,1), (0,1,2) \in S$

PIU' PRECISAMENTE POSSIAMO DIRE

UN INSIEME S DI TRIPLE E' VALIDO SE

(a) $(0, y, z) \in S \Longrightarrow z = \varphi_0(y) =$

(b) $(x, 0, z) \in S \Longrightarrow z = 1$

(c) $(x+1, y+1, z) \in S \Longrightarrow \exists\, u$ tale che:

$$(x+1, y, u) \in S, \quad (x, u, z) \in S$$

PIU' PRECISAMENTE POSSIAMO DIRE

UN INSIEME S DI TRIPLE E' VALIDO SE

(a) $(0, y, z) \in S \implies z = \varphi_0(y)$

(b) $(x, 0, z) \in S \implies z = 1$

(c) $(x+1, y+1, z) \in S \implies \exists\, u$ tale che:

$$(x+1, y, u) \in S, \quad (x, u, z) \in S$$

PER QUANTO VISTO PRIMA POSSIAMO AFFERMARE CHE

PER OGNI $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ESISTE UN INSIEME VALIDO FINITO S TALE CHE $(m, n, p) \in S$, PER QUALCHE $p \in \mathbb{N}$.

FATTO 0 Le equazioni definiscono una funzione ψ

FATTO 1 Se S è valido (per (i,j)) allora per ogni $(x,y,z) \in S$ si ha $z = \psi(x,y)$

FATTO 2 Per ogni (i,j) esiste un insieme finito di terne S valido per (i,j).

Per induz. su (i,j).

Sia $(\bar{x},\bar{y})$ minimo tale che non esiste alcun S finito valido per $(\bar{x},\bar{y})$.

- $\bar{x}=0 \to \begin{cases} \bar{y}=0 & \to \{(0,0,1)\} \text{ valido per } (0,0) \\ \bar{y}=1 & \to \{(0,1,2)\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (0,1) \\ \bar{y}>1 & \to \{(0,\bar{y},\bar{y}+2)\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (0,\bar{y}) \end{cases}$

- $\bar{y}=0 \to \{(\bar{x},0,1)\}$ valido per $(\bar{x},0)$

- Siano: - S_1 ins. finito valido per $(\bar{x},\bar{y}-1)$
  - S_2 ins. finito valido per $(\bar{x}-1,\psi(\bar{x},y-1))$

Allora $S = S_1 \cup S_2 \cup \{(\bar{x},\bar{y},\psi(\bar{x},\bar{y}))\}$ è finito e valido per $(\bar{x},\bar{y})$

cod(x,y,z) : codifica effettiva di un insieme di triple

IS_TRIPLE(t) : t è il codice di una tripla

first(t) : primo elemento di t, se t è una tripla

second(t) : secondo elemento di t, se t è una tripla

third(t) : terzo elemento di t, se t è una tripla

cod(S) : codifica effettiva di un insieme finito di numeri

IS_SET_OF_TRIPLES(v): v è il codice di un insieme finito di triple

IN(t,v) : la tripla di codice t appartiene all'insieme di triple di codice v

VALID_FOR(v,x,y) : v è il codice di un insieme di triple valido per (x,y)

$$\boxed{\psi(x,y) = \mu z\ (\mathrm{IN}(\mathrm{cod}(x,y,z),\ \mu v\,(\mathrm{VALID\_FOR}(v,x,y))))}$$

POICHE'

- LA FUNZIONE cod(x,y,z) E' <u>CALCOLABILE</u>
- I PREDICATI IN(t,v) E VALID_FOR(v,x,y) SONO <u>DECIDIBILI</u>

SI DEDUCE LA <u>CALCOLABILITA'</u> DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN $\psi(x,y)$.

CALCOLABILITA' E DECIDIBILITA' DI ALCUNE FUNZIONI E PREDICATI

✓ $cod(x,y,z) \equiv 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

✓ $IS\_TRIPLE(t) \equiv (\forall i)_{\leq t} ((t)_i \neq 0 \rightarrow i \leq 3)$

✓ $first(t) \equiv (t)_1$

✓ $second(t) \equiv (t)_2$

✓ $third(t) \equiv (t)_3$

✓ $\left[cod(S) \equiv \prod_{u \in S} p_u \right]$

✓ $IS\_SET\_OF\_TRIPLES(v)$
$\equiv (\forall i)_{\leq v} ((v)_i \neq 0 \rightarrow ((v)_i = 1 \wedge IS\_TRIPLE(i)))$

✓ $IN(t,v) = \text{"}(v)_t = 1\text{"}$

✓ $VALID\_FOR(v,x,y) \equiv$

$IS\_SET\_OF\_TRIPLES(v)$

$\wedge (\forall i)_{\leq v} (IN(i,v) \rightarrow ((first(i)=0 \rightarrow ((second(i)=0 \rightarrow third(i)=1)$
$\wedge (second(i)=1 \rightarrow third(i)=2)$
$\wedge (second(i)>1 \rightarrow third(i) = second(i)+2)))$

$\wedge (second(i)=0 \rightarrow third(i)=1)$

$\wedge ((first(i)>0 \wedge second(i)>0)$

$\rightarrow (\exists u)_{\leq v} (IN(cod(x, y \dot{-} 1, u), v)$
$\wedge IN(cod(x \dot{-} 1, u, z), v)))$

$\wedge (\exists z)_{\leq v} (IN(cod(x,y,z), v)$