RICORSIONE

MEDIANTE LA RICORSIONE E' POSSIBILE DEFINIRE NUOVI VALORI DI UNA FUNZIONE MEDIANTE VECCHI VALORI

ESEMPI

FATTORIALE: $0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$, PER $n \geq 1$

NUMERI DI FIBONACCI

$f_0 = 1$

$f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, PER $n \geq 2$

LA DEFINIZIONE PER RICORSIONE CHE USEREMO E' LA SEGUENTE (RICORSIONE PRIMITIVA)

SIANO $f(\vec{x})$ E $g(\vec{x}, y, z)$ FUNZIONI.

ALLORA

$$(*) \quad h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

$$(**) \quad h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$$

COSTITUISCE UNA DEFINIZIONE PER RICORSIONE DI $h(\vec{x}, y)$ DA $f(\vec{x})$ E $g(\vec{x}, y, z)$.

LE EQUAZIONI $(*)$, $(**)$ SONO DETTE EQUAZIONI RICORSIVE

LA PRECEDENTE DEFINIZIONE TRAE FORZA DAL SEGUENTE

TEOREMA

SIA $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ E SIANO $f(\vec{x})$ E $g(\vec{x}, y, z)$ FUNZIONI.
ALLORA ESISTE UN' UNICA FUNZIONE $h(\vec{x}, y)$ SODDISFACENTE LE EQUAZIONI RICORSIVE:

$$h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$

$$h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \quad \blacksquare$$

NEL CASO IN CUI LE $\vec{x}$ FOSSERO ASSENTI, CIOE' $n=0$, LE EQUAZIONI RICORSIVE DIVENTANO

$$h(0) = a$$

$$h(y+1) = g(y, h(y))$$

ESEMPI

(a) ADDIZIONE

$$\begin{cases} x+0=x \\ x+(y+1)=(x+y)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x,0)=x \\ h(x,y+1)=\mathrm{succ}(h(x,y)) \end{cases}$$

(b) MOLTIPLICAZIONE

$$\begin{cases} x\cdot 0=0 \\ x\cdot(y+1)=x\cdot y+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x,0)=0 \\ h(x,y+1)=h(x,y)+x \end{cases}$$

(c) FATTORIALE

$$\begin{cases} 0!=1 \\ (y+1)!=y!\cdot(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0)=1 \\ h(y+1)=h(y)\cdot(y+1) \end{cases}$$

TEOREMA

SE $f(\vec{x})$ E $g(\vec{x}, y, z)$ SONO CALCOLABILI, ALLORA ANCHE LA FUNZIONE $h(\vec{x}, y)$ DEFINITA PER RICORSIONE DA $f(\vec{x})$ E $g(\vec{x}, y, z)$ E' CALCOLABILE.

DIM

SIANO F E G PROGRAMMI IN FORMA STANDARD CHE CALCOLANO RISPETTIVAMENTE f E g.

PONIAMO $m = \max(\rho(F), \rho(G), n+2)$, OVE $\vec{x} = (x_1 - x_n)$.

E' FACILE CONVINCERSI CHE IL SEGUENTE PROGRAMMA CALCOLA LA FUNZIONE $h(\vec{x}, y)$. ./.

$$
\begin{aligned}
& T(1, m+1) \\
& \quad \vdots \\
& T(n+1, m+n+1) \\
& R_{m+n+3} \leftarrow f_F(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}) \\
I_q:\ & J(m+n+2, m+n+1, p) \\
& R_{m+n+3} \leftarrow f_G(R_{m+1}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+2}, R_{m+n+3}) \\
& S(m+n+2) \\
& J(1,1,q) \\
I_p:\ & T(m+n+3, 1)
\end{aligned}
$$

PROCEDIAMO ADESSO ALLA COMPILAZIONE DI UNA NUTRITA LISTA DI FUNZIONI CALCOLABILI

(a) $x+y$

$$\begin{cases} x+0 = x \\ x+(y+1) = (x+y)+1 \end{cases}$$

$$f(x) = U_1^1(x)$$
$$g(x,y,z) = z+1$$

(b) $x \cdot y$

$$\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x \end{cases}$$

$$f(x) = \underline{0}(x)$$
$$g(x,y,z) = z + x$$

(c) x^y

$$\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{y+1} = x^y \cdot x \end{cases}$$

$$f(x) = \underline{0}(x) + 1$$
$$g(x,y,z) = z \cdot x$$

(d) $y \dot{-} 1$

$$\begin{cases} 0 \dot{-} 1 = 0 \\ (y+1) \dot{-} 1 = y \end{cases}$$

$a = 0$

$g(y, z) = y$

(e) $x \dot{-} y =_{df} \begin{cases} x - y & \text{SE} \quad x \geq y \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 \end{cases}$$

$f(x) = U^1_1(x)$

$g(x, y, z) = z \dot{-} 1$

(f) $sg(y) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{SE} \quad y = 0 \\ 1 & \text{SE} \quad y \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} sg(0) = 0 \\ sg(y+1) = 1 \end{cases}$$

$a = 0$

$g(y, z) = 1$

(g) $\overline{sg}(y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y = 0 \\ 0 & \text{SE } y \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) = 1 \\ \overline{sg}(y+1) = 0 \end{cases}$$

$a = 1$

$g(y,z) = \underline{0}(y,z)$

OPPURE: $\overline{sg}(y) = 1 \dot{-} sg(y)$

(h) $|x-y|$

- $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

(i) $y!$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (y+1)! = y! \cdot (y+1) \end{cases}$$

$a = 1$

$g(y,z) = y \cdot z$

(j) $\min(x,y)$

- $\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

(k) $\max(x,y)$

- $\max(x,y) = x + (y \dot{-} x)$

(l) $rm(x,y) =_{df}$ "resto della divisione di y per x"
(con la convenzione che $rm(0,y) = y$)

$$\begin{cases} rm(x,0) = 0 \\ rm(x,y+1) = \begin{cases} rm(x,y)+1 & \text{SE } rm(x,y)+1 \neq x \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \\ \qquad = (rm(x,y)+1) \cdot sg(|x-(rm(x,y)+1)|) \end{cases}$$

$f(x) = \underline{0}(x)$, $g(x,y,z) = (z+1) \cdot sg(|x-(z+1)|)$

(m) $qt(x,y)$ = "quoziente della divisione di y per x"
(poniamo $q(0,y) = 0$)

$$\begin{cases} qt(x,0) = 0 \\ qt(x,y+1) = \begin{cases} qt(x,y)+1 & \text{SE} \quad rm(x,y)+1 = x \\ qt(x,y) & \text{SE} \quad rm(x,y)+1 \neq x \end{cases} \\ \qquad = qt(x,y) + \overline{sg}(|x-(rm(x,y)+1)|) \end{cases}$$

$f(x) = \underline{0}$, $g(x,y,z) = z + \overline{sg}(|x-(rm(x,y)+1)|)$

(n) $div(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE} \quad x \mid y \\ 0 & \text{SE} \quad x \nmid y \end{cases}$

CONVENIAMO CHE $0 \mid 0$
MA $0 \nmid y$ SE $y \neq 0$

- $div(x,y) = \overline{sg}(rm(x,y))$

LEMMA (DEFINIZIONE PER CASI)

SE $f_1(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})$ SONO FUNZIONI CALCOLABILI E $M_1(\vec{x}), \dots, M_k(\vec{x})$ SONO PREDICATI DECIDIBILI TALI CHE PER OGNI $\vec{x}$ ESATTAMENTE UNO TRA $M_1(\vec{x}), \dots, M_k(\vec{x})$ E' VERO, ALLORA LA FUNZIONE

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}) & \text{SE } M_1(\vec{x}) \text{ E' VERO} \\ \vdots & \vdots \\ f_k(\vec{x}) & \text{SE } M_k(\vec{x}) \text{ E' VERO} \end{cases}$$

E' CALCOLABILE.

DIM E' SUFFICIENTE VERIFICARE CHE

$$g(\vec{x}) = c_{M_1}(\vec{x}) \cdot f_1(\vec{x}) + \dots + c_{M_k}(\vec{x}) \cdot f_k(\vec{x}). \quad \blacksquare$$

ALGEBRA DELLA DECIDIBILITÀ

SE $M(\vec{x})$ E $Q(\vec{x})$ SONO PREDICATI DECIDIBILI, ALLORA ANCHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

(a) "not $M(\vec{x})$"

$$c_{\underline{not}\, M}(\vec{x}) = 1 \dot{-} c_M(\vec{x})$$

(b) "$M(\vec{x})$ and $Q(\vec{x})$"

$$c_{M\, \underline{and}\, Q}(\vec{x}) = c_M(\vec{x}) \cdot c_Q(\vec{x})$$

(c) "$M(\vec{x})$ or $Q(\vec{x})$"

$$c_{M\, \underline{or}\, Q}(\vec{x}) = \max\left(c_M(\vec{x}), c_Q(\vec{x})\right)$$

SOMMATORIE E PRODOTTI LIMITATI

E' POSSIBILE DEFINIRE PER RICORSIONE LE SEGUENTI FUNZIONI

$$\sum_{z<y} f(\vec{x},z)$$ (SOMMATORIA LIMITATA)

$$\prod_{z<y} f(\vec{x},z)$$ (PRODOTTO LIMITATO)

$$\begin{cases} \sum_{z<0} f(\vec{x},z) = 0 \\ \sum_{z<y+1} f(\vec{x},z) = \sum_{z<y} f(\vec{x},z) + f(\vec{x},y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \prod_{z<0} f(\vec{x},z) = 1 \\ \prod_{z<y+1} f(\vec{x},z) = \left(\prod_{z<y} f(\vec{x},z)\right) \cdot f(\vec{x},y) \end{cases}$$

TEOREMA

SE $f(\vec{x}, z)$ E' CALCOLABILE, ANCHE LE FUNZIONI

$\sum_{z<y} f(\vec{x}, z)$ E $\prod_{z<y} f(\vec{x}, z)$ SONO CALCOLABILI

COROLLARIO

SE $f(\vec{x}, z)$ E $k(\vec{x}, \vec{w})$ SONO CALCOLABILI, RISULTANO CALCOLABILI ANCHE LE FUNZIONI

$$\sum_{z<k(\vec{x}, \vec{w})} f(\vec{x}, z) \quad E \quad \prod_{z<k(\vec{x}, \vec{w})} f(\vec{x}, z).$$

OPERATORE DI MINIMALIZZAZIONE LIMITATA

DATO UN PREDICATO $M(\vec{x}, z)$ PONIAMO:

$$\mu z<y\,(M(\vec{x}, z)) = \begin{cases} \text{minimo } z<y \text{ tale che } M(\vec{x}, z) \text{ è vero} \\ \qquad \text{se tale } z \text{ esiste} \\ y \qquad \text{altrimenti} \end{cases}$$

TEOREMA

SIA $f(\vec{x}, z)$ UNA FUNZIONE CALCOLABILE E TOTALE.
ALLORA LA FUNZIONE $\mu z<y\,(f(\vec{x}, z)=0)$ E' ANCH'ESSA CALCOLABILE E TOTALE.

DIM. SI CONSIDERI LA FUNZIONE $h(\vec{x}, v) =_{df} \prod_{u \leq v} sg(f(\vec{x}, u))$,
SIA $z_0 = \mu z<y\,(f(\vec{x}, z)=0)$.
POICHE' $h(\vec{x}, v) = \begin{cases} 1 & \text{SE } v < z_0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$
SI HA $\mu z<y\,(f(\vec{x}, z)=0) = \sum_{v<y} h(\vec{x}, v)$, DA CUI LA CALCOLABILITA'. ∎

COROLLARIO

SE $f(\vec{x}, z)$ E $k(\vec{x}, \vec{w})$ SONO FUNZIONI CALCOLABILI E TOTALI, TALE RISULTA ANCHE LA FUNZIONE

$$\mu z < k(\vec{x}, \vec{w})\ (f(\vec{x}, z) = 0)$$

■

COROLLARIO

SIA $R(\vec{x}, y)$ UN PREDICATO DECIDIBILE. ALLORA

(a) LA FUNZIONE $f(\vec{x}, y) = \mu z < y\ R(\vec{x}, z)$ E' CALCOLABILE

$$f(\vec{x}, y) = \mu z < y\ (\overline{sg}(c_R(\vec{x}, z)))$$

(b) I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI:

$$M_1(\vec{x}, y) \equiv (\forall z < y)\ R(\vec{x}, z) \qquad c_{M_1}(\vec{x}, y) = \prod_{z<y} c_R(\vec{x}, z)$$

$$M_2(\vec{x}, y) \equiv (\exists z < y)\ R(\vec{x}, z) \qquad M_2(\vec{x}, y) = \underline{\text{not}}\,((\forall z < y)\ \underline{\text{not}}\ R(\vec{x}, z))$$

■

TEOREMA

LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

(a) $D(x) =$ "# divisori di x" (PER CONVENZIONE $D(0)=1$)

$$D(x) = \sum_{y \le x} div(y,x)$$

(b) $$Pr(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \text{ E' PRIMO} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$Pr(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } D(x)=2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} = \overline{sg}\left(|D(x)-2|\right)$$

(c) $p_x =$ "x-esimo primo" ($p_0 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...)

$$p_0 = 0$$

$$p_{x+1} = \mu z \le (p_x! + 1)\,(z > p_x \ \underline{\text{and}}\ Pr(z) = 1)$$

(d) $$(x)_y = \begin{cases} \text{esponente di } p_y \text{ nella fattorizzazione di } x \\ \qquad \text{se } x, y > 0 \\ 0 \quad \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0 \end{cases}$$

$$(x)_y = \mu z < x \left(p_y^{z+1} \nmid x \right)$$

SI OSSERVI CHE GRAZIE ALLA FUNZIONE $(x)_y$ RISULTA POSSIBILE CODIFICARE LA SEQUENZA DI INTERI $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ MEDIANTE IL NUMERO $b = p_1^{a_1+1} \cdot p_2^{a_2+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$.

QUINDI SI HA:

$$n = \mu z < b \left((b)_{z+1} = 0 \right)$$

$$a_i = (b)_i \dot{-} 1 \text{ , PER } i = 1, 2, \dots, n.$$

ESEMPIO (NUMERI DI FIBONACCI)

COME TRATTARE LA RICORSIONE

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=1 \\ f(y+2)=f(y)+f(y+1) \end{cases} \qquad ?$$

SI DEFINISCA $g(y)=2^{f(y)}\cdot 3^{f(y+1)}$

SI HA: $g(0)=2^{f(0)}\cdot 3^{f(1)} = 2^1\cdot 3^1 = 6$

$$g(y+1)=2^{f(y+1)}\cdot 3^{f(y+2)} = 2^{f(y+1)}\cdot 3^{f(y)+f(y+1)}$$

$$= 2^{(g(y))_2}\cdot 3^{(g(y))_1+(g(y))_2}$$

QUINDI $g(y)$ E' CALCOLABILE.

POICHE' $f(y)=(g(y))_1$, ANCHE $f(y)$ E' CALCOLABILE

ESERCIZI

(1) DIMOSTRARE CHE LE SEGUENTI FUNZIONI SONO CALCOLABILI

(a) TUTTI I POLINOMI $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$

(b) $[\sqrt{x}]$

(c) $gcd(x, y)$ (MASSIMO COMUN DIVISORE)

(d) $lcm(x, y)$ (MINIMO COMUNE MULTIPLO)

(e) $f(x) =$ "numero divisori primi di x"

(f) $\varphi(x) =$ "numero interi positivi minori di x e primi con x"
(FUNZIONE DI EULERO)

ES. 2

SIA $\pi(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$.

(a) SI DIMOSTRI CHE π E' UNA BIIEZIONE CALCOLABILE DA $\mathbb{N}^2$ SU TUTTO $\mathbb{N}$.

SIANO INOLTRE $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ TALI CHE

$$\pi(\pi_1(z), \pi_2(z)) = z.$$

(b) SI DIMOSTRI CHE π_1 E π_2 SONO CALCOLABILI

(3) DIMOSTRARE CHE I SEGUENTI PREDICATI SONO DECIDIBILI

(a) "x E' DISPARI"

(b) "x E' UNA POTENZA DI UN NUMERO PRIMO"

(c) "x E' UN CUBO PERFETTO, CIOE' $x = y^3$ PER QUALCHE INTERO y"

ES. 4

- OGNI NUMERO $x \in \mathbb{N}$ PUÒ ESSERE SCRITTO NELLA FORMA

(a) $x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i$, CON $\alpha_i \in \{0,1\}$

IN UN SOLO MODO

- QUINDI OGNI $x > 0$ AMMETTE ESPRESSIONI UNIVOCHE DELLA FORMA:

(b) $x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_\ell}$, CON $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell$ E $\ell \geq 1$

(c) $x = 2^{a_1} + 2^{a_1 + a_2 + 1} + \ldots + 2^{a_1 + a_2 + \ldots + a_\ell + (\ell - 1)}$,

CON $a_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$, E $\ell \geq 1$

RISULTANO QUINDI DEFINITE LE SEGUENTI FUNZIONI:

- $\alpha(i, x) =_{def} \alpha_i$ $\left(\text{CON } x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i 2^i\right)$

- $\ell(x) =_{def} \begin{cases} \ell & \text{SE } x > 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$b(i, x) = \begin{cases} b_i & \text{SE } x > 0 \text{ E } 1 \leq i \leq \ell \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

$\Big($CON $x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots + 2^{b_\ell}$,
$= 2^{a_1} + 2^{a_1 + a_2 - 1} + \ldots$
$\ldots + 2^{a_1 + a_2 + \ldots + a_\ell + (\ell - 1)}$
SE $x > 0\Big)$

ES. 4 (cntd)

$$a(i,x) = \begin{cases} a_i & \text{SE } x>0 \text{ E } 1 \leq i \leq \ell \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SI DIMOSTRI CHE LE FUNZIONI $\alpha(i,x)$, $\ell(x)$, $b(i,x)$, $a(i,x)$ SONO CALCOLABILI.

- ABBIAMO DIMOSTRATO CHE
  - LE FUNZIONI INIZIALI SONO CALCOLABILI
  - LA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI CALCOLABILI DA' LUOGO A FUNZIONI CALCOLABILI
  - LA RICORSIONE APPLICATA A FUNZIONI CALCOLABILI DA' LUOGO A FUNZIONI CALCOLABILI
- LE FUNZIONI CHE SI OTTENGONO A PARTIRE DALLE FUNZIONI INIZIALI MEDIANTE L'APPLICAZIONE DI UN NUMERO FINITO DI COMPOSIZIONI E RICORSIONI SI DICONO PRIMITIVE RICORSIVE (PR)

- CHE RELAZIONE C'E' TRA $\mathcal{C}_{URM}$ E $\mathcal{PR}$
- OVVIAMENTE VALE $\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{C}_{URM}$
- INOLTRE POICHE' TUTTE LE FUNZIONI IN $\mathcal{PR}$ SONO TOTALI, MENTRE $\mathcal{C}_{URM}$ CONTIENE ANCHE FUNZIONI PARZIALI, SI HA $\mathcal{PR} \subsetneqq \mathcal{C}_{URM}$
- CHE RELAZIONE C'E' TRA $\mathcal{PR}$ E $Tot(\mathcal{C}_{URM})$, CIOE' L'INSIEME DELLE FUNZIONI URM-CALCOLABILI E TOTALI ?
- SI DIMOSTRA CHE $\mathcal{PR} \subsetneqq Tot(\mathcal{C}_{URM})$ (FUNZIONE DI ACKERMANN)
- C'E' QUINDI BISOGNO DI QUALCHE ALTRO MECCANISMO PER GENERARE FUNZIONI CALCOLABILI (MINIMALIZZAZIONE)