MINIMUM SPANNING TREES

E LORO SEGNATURA

DIFFERENZA SIMMETRICA

$$A \Delta B =_{def} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

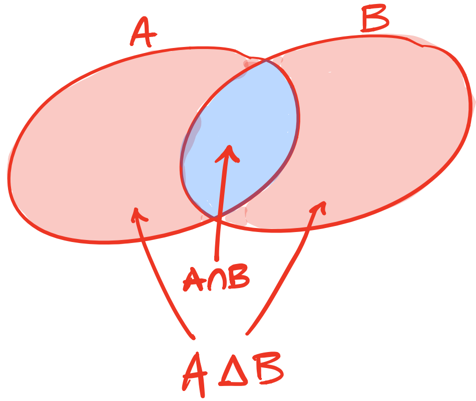
$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$$

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

- SE $|A| = |B|$, ALLORA

$$|A \Delta B| = 2 \cdot (|A| - |A \cap B|)$$



DISTANZA TRA DUE SPANNING TREE

- SIANO $\tau_1 = (V, T_1)$ E $\tau_2 = (V, T_2)$ SPANNING TREE DI UN MEDESIMO GRAFO CONNESSO $G = (V, E)$.

DEFINIAMO LA DISTANZA TRA τ_1 E τ_2 (O, EQUIVALENTEMENTE, TRA T_1 E T_2) PONENDO

$$d(\tau_1, \tau_2) := d(T_1, T_2) := \frac{|T_1 \triangle T_2|}{2}$$

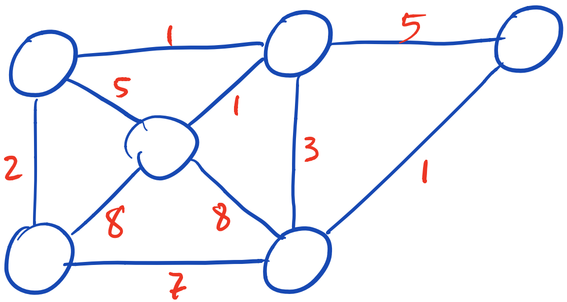
SEGNATURA DI UN MST

- SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO E SIA $w: E \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE PESO SU G

- LA SEGNATURA $\Sigma(G)$ DI G E' LA SEQUENZA ORDINATA IN ORDINE NON DECRESCENTE DEI PESI DEGLI ARCHI DI G

ES.

G:



$$\Sigma(G) = (1,1,1,2,3,5,5,7,8,8)$$

UNICITÀ DELLA SEGNATURA DEGLI MST

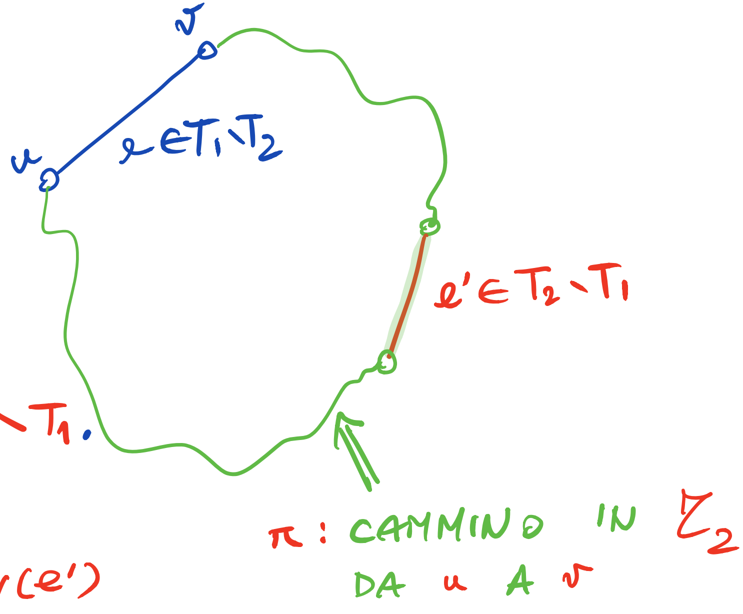
TEOREMA DUE QUALUNQUE MST DI UNO STESSO GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO HANNO LA MEDESIMA SEGNATURA.

DIMOSTRAZIONE

- PROCEDIAMO PER ASSURDO
- SIA (G,w) UN GRAFO NON ORIENTATO CONNESSO E PESATO, CON $G=(V,E)$ E $w: E \to \mathbb{R}$, CONTENENTE PIÙ MST CON SEGNATURE DISTINTE
- IN PARTICOLARE, SIANO $\mathcal{T}_1=(V,T_1)$ E $\mathcal{T}_2=(V,T_2)$ DUE MST DI G CON SEGNATURE DISTINTE E TALI CHE LA DISTANZA $d(T_1,T_2)$ SIA MINIMA
- SIA $e=(u,v)$ UN ARCO DI PESO MINIMO IN $T_1 \Delta T_2$: SENZA PERDITA DI GENERALITÀ, POSSIAMO SUPPORRE CHE

$$e \in T_1 \quad \text{E} \quad e \notin T_2$$

- SIA (V_1,V_2) IL TAGLIO DI G INDOTTO CANCELLANDO L'ARCO e DAL MST $\mathcal{T}_1$
- SIA π UN CAMMINO IN $\mathcal{T}_2$ DA u A v E SIA e' UN ARCO IN π CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1,V_2). ALLORA $e' \in T_2 \setminus T_1$.



- PER LA MINIMALITA' DI $w(e)$ IN $T_1 \Delta T_2$, SI HA $w(e) \le w(e')$
- PERTANTO, POSTO $T_2' = (T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$, SI HA CHE
  - $\mathcal{T}_2' = (V, T_2')$ E' UNO SPANNING TREE DI G, E
  - $w(T_2) \le w(T_2') = w(T_2) - w(e') + w(e) \le w(T_2)$,

  DA CUI $w(T_2') = w(T_2)$ E QUINDI $w(e) = w(e')$.

DUNQUE ANCHE $\mathcal{T}_2' = (V, T_2')$ E' UN MST DI G

- SI NOTI INOLTRE CHE:
  - $\Sigma(T_2') = \Sigma(T_2) \neq \Sigma(T_1)$ (IN QUANTO $w(e) = w(e')$)
  - $T_1 \Delta T_2' = (T_1 \Delta T_2) \setminus \{e, e'\}$, E QUINDI

$$d(T_1, T_2') = \frac{|T_1 \Delta T_2'|}{2} = \frac{|T_1 \Delta T_2|}{2} - 1 < d(T_1, T_2),$$

CONTRADDICENDO LA MINIMALITA' DI $d(T_1, T_2)$

- LA CONTRADDIZIONE PROVIENE DALL'AVER SUPPOSTO CHE POSSANO ESISTERE GRAFI PESATI NON ORIENTATI E CONNESSI DOTATI DI MST CON SEGNATURE DISTINTE.

PERTANTO IL TEOREMA RISULTA DIMOSTRATO. $\blacksquare$

MINIMALITA' DELLA SEGNATURA DI UN MST

- SIANO σ E σ' SEGNATURE DI SPANNING TREE DI UN MEDESIMO GRAFO.

PONIAMO:

$\sigma < \sigma'$ $\Longleftrightarrow$ σ PRECEDE σ' LESSICOGRAFICAMENTE

CIOE' SE E SOLO SE, POSTO

$$\sigma = (s_1, \dots, s_k) \quad \text{E} \quad \sigma' = (s_1', \dots, s_k'),$$

SI HA:

$$s_1 = s_1', \quad s_2 = s_2', \quad \dots, \quad s_{\ell-1} = s_{\ell-1}', \quad s_\ell < s_\ell'$$

PER QUALCHE $1 \leq \ell < k$.

TEOREMA UNO SPANNING TREE E' UN MST SE E SOLO SE LA SUA SEGNATURA E' LESSICOGRAFICAMENTE MINIMA

DIMOSTRAZIONE

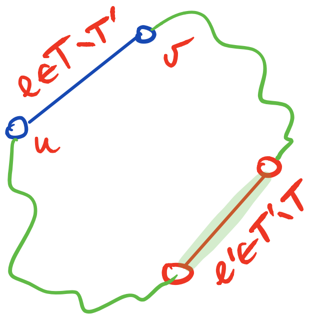
($\Rightarrow$)

PROCEDIAMO PER ASSURDO, SUPPONENDO CHE ESISTA UN GRAFO PESATO (G, w) NON ORIENTATO E CONNESSO, CON $G = (V, E)$, I CUI MST HANNO UNA SEGNATURA σ NON MINIMA.

- SIA (τ, τ'), CON $\tau = (V, T)$ E $\tau' = (V, T')$, UNA COPPIA DI SPANNING TREE TALI CHE:
  - τ SIA UN MST
  - $\sigma' := \Sigma(\tau') < \Sigma(\tau) = \sigma$
  - $d(\tau, \tau')$ SIA MINIMA

- SIA $e \in T \Delta T'$ DI PESO <u>MINIMO</u>, CON $e = (u, v)$

CASO $e \in T \setminus T'$:



- SIA (V_1, V_2) IL TAGLIO DI G INDOTTO CANCELLANDO L'ARCO e DAL MST T
- SIA π UN CAMMINO IN T' DA u A v E SIA e' UN ARCO IN π CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1, V_2). ALLORA $e' \in T' \setminus T$.
- AL SOLITO, $(T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ E' UNO SPANNING TREE DI $G=(V,E)$.
- PER LA MINIMALITA' DI $w(e)$, SI HA

$$w(e) \leq w(e').$$

- PERTANTO

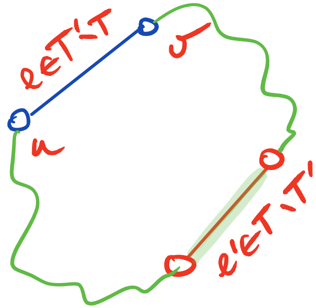
$$\Sigma((T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) \leq \Sigma(T') < \Sigma(T)$$

INOLTRE,

$$d((T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}, T) < d(T', T),$$

IL CHE CONTRADDICE LA MINIMALITÀ DI $d(T', T)$.

CASO $e \in T' \setminus T$:



- SIA (V_1, V_2) IL TAGLIO DI G INDOTTO CANCELLANDO L'ARCO e DAL MST T'
- SIA π UN CAMMINO IN T DA u A v E SIA e' UN ARCO IN π CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1, V_2). ALLORA $e' \in T \setminus T'$.

- AL SOLITO, $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ E' UNO SPANNING TREE DI $G=(V,E)$.
- PER LA MINIMALITA' DI $w(e)$ SI HA

$$w((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) \le w(T)$$

E QUINDI $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ E' UN MST E $w(e) = w(e')$.

- SI HA DUNQUE: $\Sigma(T') < \Sigma(T) = \Sigma((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$.
- INOLTRE, $d(T', (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) < d(T', T)$, E DUNQUE LA COPPIA $(T', (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ CONTRADDICE LA MINIMALITA' DI $d(T', T)$.

($\Leftarrow$)

SIA τ UNO SPANNING TREE DI G CON SEGNATURA MINIMA E SIA τ' UN MST DI G.

PER LA PRIMA PARTE DEL TEOREMA, LA SEGNATURA DI τ' E' MINIMA, DUNQUE $\Sigma(\tau) = \Sigma(\tau')$, DA CUI SEGUE BANALMENTE CHE $w(\tau) = w(\tau')$.

PERTANTO ANCHE τ E' UN MST. $\blacksquare$