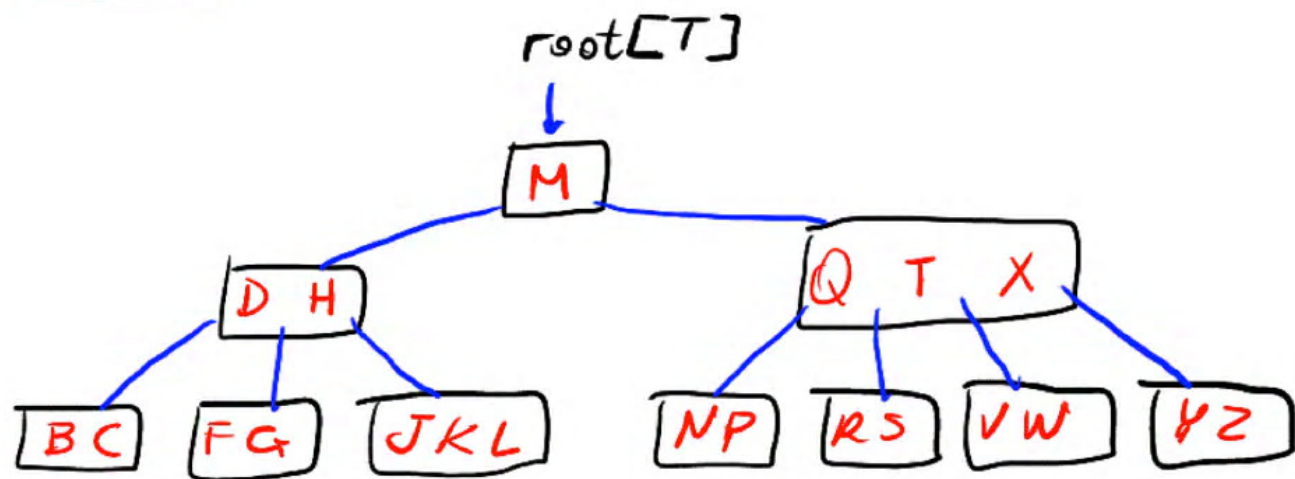


B-TREES

- I **B-TREE** SONO ALBERI BILANCIATI DI RICERCA PARTICOLARMENTE ADATTI PER ESSERE UTILIZZATI SU **MEMORIA SECONDARIA** (E QUINDI PER MANTENERE GRANDI QUANTITÀ DI DATI)
- A DIFFERENZA DI ALTRI TIPI DI ALBERI BILANCIATI, I NODI DEI **B-TREE** POSSONO AVERE UN **FATTORE DI RAMIFICAZIONE** MOLTO ALTO.
- CIÒ CONSENTE AI **B-TREE** DI AVERE UN'ALTEZZA PIÙ BASSA RISPETTO AD ALTRI TIPI DI ALBERI BILANCIATI, A PARITÀ DI NUMERO DI RECORD

ESEMPIO

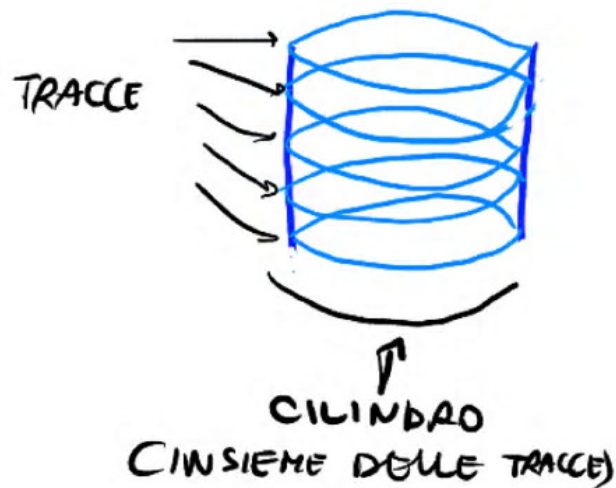
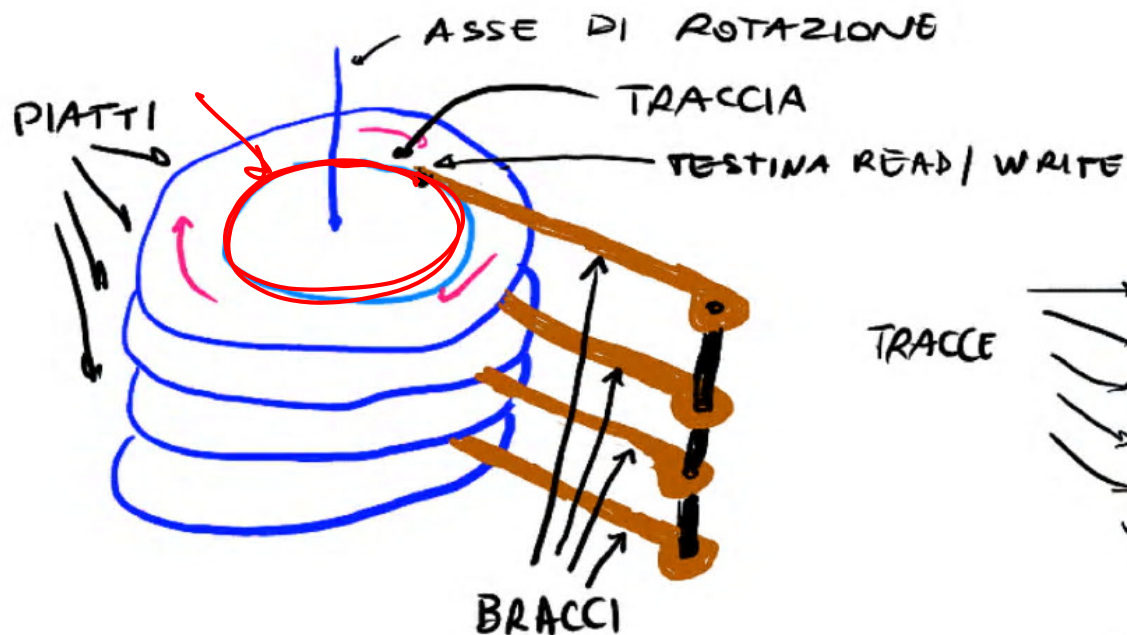


Digressione sulla memoria secondaria

- **MEMORIA PRIMARIA O PRINCIPALE**
BASATA SU CHIP DI MEMORIA AL SILICIO
- **MEMORIA SECONDARIA**
BASATA SU DISCHI MAGNETICI (O, PEGGIO ANCORA,
SU NASTRI MAGNETICI)
- IL COSTO DELLA MEMORIA SECONDARIA E'
TIPICAMENTE CIRCA 100 VOLTE INFERIORE A
QUELLA PRIMARIA (PER BIT)

- I TEMPI DI ACCESSO ALLA MEMORIA SECONDARIA SOLITAMENTE SONO DI CIRCA 10^5 VOLTE SUPERIORI A QUELLI DELLA MEMORIA PRIMARIA
- PERTANTO GLI ALGORITMI CHE UTILIZZANO STRUTTURE DATI RESIDENTI SU MEMORIA SECONDARIA VANNO ANALIZZATI ANCHE IN BASE AL NUMERO DI ACCESSI READ/WRITE ALLA MEMORIA SECONDARIA

SCHEMA DI DISCO MAGNETICO



- LA VELOCITA' DI ROTAZIONE DI UN DISCO MAGNETICO SOLITAMENTE VARIA DA 5400 A 15000 ROTAZIONI/MIN
- UNA ROTAZIONE COMPLETA RICHIEDE 8,33 mSEC
(CIRCA 10^5 PIU' DEI 100 nmsEC RICHIESTI DA UN ACCESSO ALLA MEMORIA PRINCIPALE)
- IL MOVIMENTO DELLE TESTINE RICHIEDE UN TEMPO VARIABILE DA 3 A 9 mSEC
- PER AMMORTIZZARE GLI ELEVATI TEMPI DI POSIZIONAMENTO DELLE TESTINE SULLE TRACCE DA LEGGERE/SCRIVERE, L'INFORMAZIONE E' ORGANIZZATA SUI CILINDRI MEDIANTE BLOCCHI DELLA STESSA DIMENSIONE, DETTI PAGINE

- LA DIMENSIONE TIPICA DI UNA PAGINA VA DAI 2^{11} AI 2^{14} BIT
- RISULTA QUINDI CONVENIENTE ORGANIZZARE LE STRUTTURE DATI RESIDENTI SU MEMORIA SECONDARIA IN MODO DA SFRUTTARE LA SUDDIVISIONE IN PAGINE IN QUANTO GLI ACCESSI IN LETTURA E/O SCRITTURA AVVENGONO SU PAGINE INTERE
- ANALizzeremo GLI ALGORITMI PER LA GESTIONE DEI B-TREE IN BASE A:
 - NUMERO DI ACCESSI AL DISCO
 - TEMPO DI CPU

- UN OGGETTO RESIDENTE IN MEMORIA SECONDARIA, CUI SI ACCEDE MEDIANTE PUNTATORE x , SARÀ MANIPOLATO COME SEGUE:

DISK-READ (x)

OPERAZIONI CHE LEGGONO/SCRIVONO I CAMPI DI x

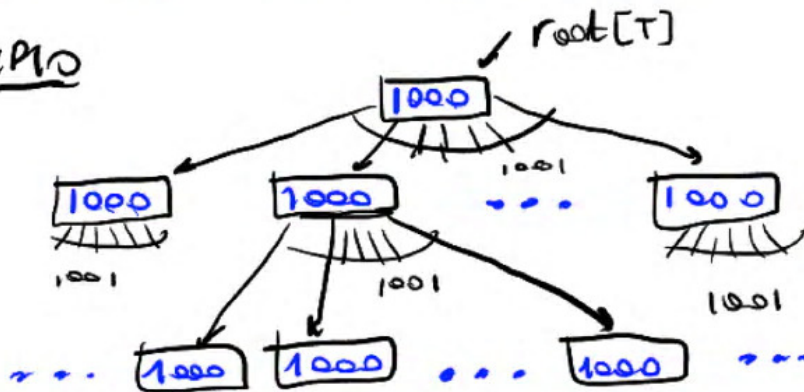
DISK-WRITE (x)

ALTRE OPERAZIONI CHE ACCEDONO AI CAMPI DI x SENZA MODIFICARLI

- I B-TREE SONO UTILIZZATI PER GESTIRE GRANDI QUANTITÀ DI DATI CHE NON POSSONO ESSERE MANTENUTI IN MEMORIA PRIMARIA
- TIPICAMENTE LA DIMENSIONE DI UN NODO IN UN B-TREE COINCIDE CON QUELLA DI UNA PAGINA

- TIPICI VALORI PER I FATTORI DI RAMIFICAZIONE DI UN B-TREE PER LA GESTIONE DI GRANDI QUANTITA' DI DATI VANNO DA 50 A 2000, IN BASE ANCHE ALLA DIMENSIONE DI UNA PAGINA

ESEMPIO



1 Node - 1000 CHIAVI
10

1001 Node
1001.000 CHIAVI

1002001 Node
1002001000 CHIAVI

B-TREE DI ALTEZZA 2 E FATTORE DI RAMIFICAZIONE 1001

- PER SEMPLICITÀ SUPPORREMO CHE OGNI INFORMAZIONE COLLATERALE RIGUARDANTE UN CERTO OGGETTO SIA MEMORIZZATA NELLO STESSO NODO DEL B-TREE CONTENENTE LA CHIAVE DELL'OGGETTO STESSO.
- LA VARIANTE DEI **B⁺-TREE** MANTIENE GLI OGGETTI SULLE FOGLIE E LE CHIAVI E PUNTORI A FIGLI SUI NODI INTERNI

Definizione di B-tree

- UN B-TREE T È UN ALBERO DI RICERCA CON RADICE $root[T]$, CHE GODE DELLE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. CIASCUN NODO x HA I SEGUENTI CAMPI:

- $n[x]$, NUMERO DELLE CHIAVI IN x

- LE $n[x]$ CHIAVI IN ORDINE NON DECRESCENTE:

$$key_1[x] \leq key_2[x] \leq \dots \leq key_{n[x]}[x]$$

- $leaf[x]$, CAMPO BOOLEANO TALE CHE

$leaf[x] = VERO \rightarrow x$ È UNA FOGLIA

$leaf[x] = FALSO \rightarrow x$ È UN NODO INTERNO

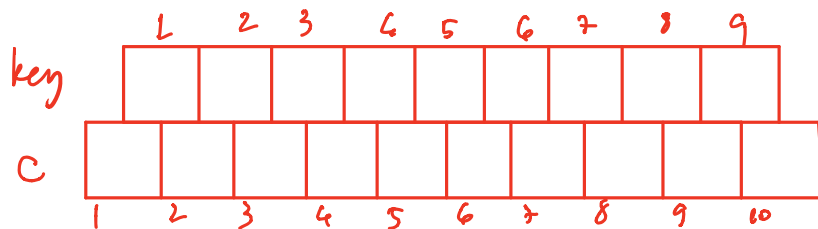
./.

2. CIASCUN NODO INTERNO x CONTIENE $n(x) + 1$ PUNTATORI AI FIGLI $c_1(x), c_2(x), \dots, c_{n(x)+1}(x)$
3. SE k_i DENOTA UNA CHIAVE NEL SOTTOALBERO DI RADICE $c_i(x)$, PER $i = 1, 2, \dots, n(x) + 1$, VALE:

$$k_1 \leq \text{key}_1(x) \leq k_2 \leq \text{key}_2(x) \leq \dots \leq \text{key}_{n(x)}(x) \leq k_{n(x)+1}$$

(DA CUI SEGUE CHE IL B-TREE È UN ALBERO DI RICERCA)

4. TUTTE LE FOGLIE HANNO LA STESSA PROFONDITÀ (CUIVALE QUINDI ALL'ALTEZZA h DEL B-TREE



5. IL B-TREE E' CARATTERIZZATO DA UNA QUANTITA'
 $t \geq 2$, DETTA GRADO MINIMO, TALE CHE

- TUTTI I NODI, AD ECCEZIONE DELLA RADICE,
DEBONO CONTENERE ALMENO $t-1$ CHIAVI.

SE IL B-TREE E' NON-VUOTO, ALLORA
• LA RADICE DEVE CONTENERE ALMENO UNA
CHIAVE

- TUTTI I NODI DEBONO CONTENERE AL PIU'
 $2t-1$ CHIAVI

• UN NODO CHE CONTIENE $2t-1$ CHIAVI SI
DICE PIENO

ESEMPIO: $t=2 \rightarrow 2-3-4$ TREE

TEOREMA (ALTEZZA DI UN B-TREE)

L'ALTEZZA h DI UN B-TREE T DI GRADO MINIMO t CONTENENTE n CHIAVI, CON $n \geq 1$, SODDISFA

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

DIM SIA T COME NELL'ENUNCIATO E SIA T' IL B-TREE DI ALTEZZA h CONTENENTE IL MINOR NUMERO POSSIBILE DI CHIAVI.

SIA n' IL NUMERO DI CHIAVI CONTENUTE IN T' .

OVVIAMENTE: $n' \leq n$.

DIMOSTREMO CHE

$$\underline{h = \log_t \frac{n'+1}{2} \leq \log_t \frac{n+1}{2}}, \text{ DA CUI LA TESI.}$$

$$g(h) \leq n \leq l(h)$$

altesse h

minimo numero di dischi
in un albero di altesse h .

$$l^{-1}(n) \leq h$$

$$t-1 \leq \# \text{dischi} \leq 2t-1$$

$$l^{-1}(n) \leq h \leq g^{-1}(n)$$

\Uparrow

$$\underline{t \leq \# \text{figli} \leq 2t}$$

	# nodi	# dischi
0	1	1
1	2	$2(t-1) = 2(t_1)t^0$
2	$2t$	$2t(t-1) = 2(t_2)t^1$
3	$2t^2$	$2t^2(t-1) \vdots$
4	$2t^3$	$2t^3(t-1) \vdots$
\vdots	\vdots	\vdots
h	$2t^{h-1}$	$2t^{h-1}(t-1) = 2(t_h)t^{h-1}$

$$1 + 2(t-1) \sum_{i=0}^{h-1} t^i = 1 + 2(t-1) \frac{t^h - 1}{t-1}$$

$$= 1 + 2t^h - 2 = 2t^h - 1$$

$$2t^h - 1 \leq n \quad \rightarrow \quad 2t^h \leq n+1$$

$$t^h \leq \frac{n+1}{2}$$

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

altezza	# nodi	# di vertici
0	1	$2t(2t+1)^0$
1	$(2t+1)$	$2t(2t+1)$
2	$(2t+1)^2$	$2t(2t+1)^2$
3	$(2t+1)^3$	$2t(2t+1)^3$
\vdots	\vdots	\vdots
h	$(2t+1)^h$	$2t(2t+1)^h$

$$l(h) = 2t \sum_{i=0}^h (2t+1)^i = 2t \frac{(2t+1)^{h+1} - 1}{2t+1 - 1}$$

$$= (2t+1)^{h+1} - 1$$

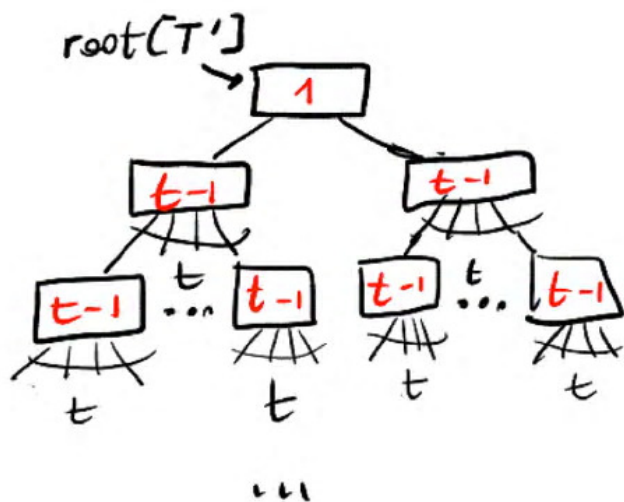
$$n \leq l(h) = (2t+1)^{h+1} - 1$$

$$n+1 \leq (2t+1)^{h+1}$$

$$\log_{2t+1} (n+1) \leq h+1$$

$$\log_{2t+1} (n+1) - 1 \leq h$$

$$\log_{2t+1} \frac{n+1}{2t+1} \leq h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$



<u>PROFONDITA'</u>	<u># NODI</u>	<u># CHIAVI</u>
0	1	1
1	2	$2(t-1)$
2	$2t$	$2t(t-1)$
3	$2t^2$	$2t^2(t-1)$
\vdots	\vdots	\vdots
h	$2t^{h-1}$	$2t^{h-1}(t-1)$

$$n' = 1 + 2(t-1) \sum_{i=1}^h t^{i-1} = 1 + 2(t-1) \frac{t^h - 1}{t-1} = 2t^h - 1 =$$

$$\Rightarrow 2t^h = n' + 1 \Rightarrow t^h = \frac{n' + 1}{2} \Rightarrow h = \log_t \frac{n' + 1}{2} \quad \blacksquare$$

OPERAZIONI DI BASE SUI B-TREE

- B-TREE-SEARCH
- B-TREE-CREATE
- B-TREE-INSERT
- B-TREE-DELETE

■ SUPPORREMO CHE:

- LA RADICE DEL B-TREE SIA SEMPRE IN MEMORIA PRINCIPALE
- PER TUTTI I NODI PASSATI COME PARAMETRO DEVE ESSERE STATA CHIAMATA LA PROCEDURA **DISK-READ**

- ### ■ PRESENTEREMO ALGORITMI A SINGOLA PASSATA (TRANNE IN ALCUNI CASI DI **B-TREE-DELETE**)

B-TREE-SEARCH (x, k)

(x PUNTA ALLA RADICE, k È LA CHIAVE CERCATA)

$i = 1$

while $i \leq n[x]$ and $k > key_i[x]$ do

$i = i + 1$

if $i \leq n[x]$ and $k = key_i[x]$ then

return (x, i)

if leaf $[x]$ then

return NIL

else

DISK-READ ($c_i[x]$)

return B-TREE-SEARCH ($c_i[x], k$)

COMPLESSITA'

$$O(h) = O(\log_{\frac{1}{t}} n) \quad \text{ACCESSI AL DISCO}$$

$$O(th) = O(t \log_{\frac{1}{t}} n) \quad \text{TEMPO DI CPU}$$

B-TREE-CREATE (T)

(CREA UN B-TREE VUOTO T)

$x := \text{ALLOCATE-NODE}()$

$\text{leaf}[x] := \text{TRUE}$

$n[x] := 0$

$\text{DISK-WRITE}(x)$

$\text{root}[T] := x$

COMPLESSITA'

$O(1)$

ACCESSI AL DISCO

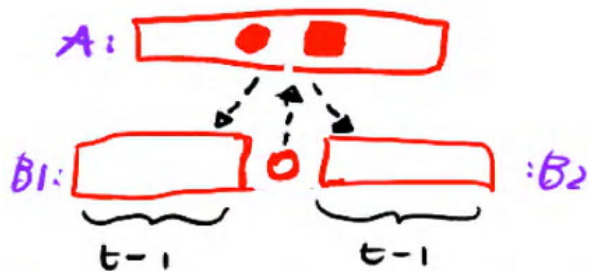
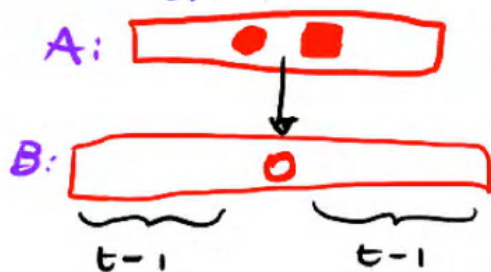
$O(1)$

TEMPO DI CPU

INSERIMENTO DI UNA CHIAVE IN UN B-TREE

PROCEDURA NATURALE (DUE POSSIBILI PASSATE)

- SI CHIAMA $B\text{-TREE-SEARCH}(\text{root}[T], k)$ PER LOCALIZZARE LA FOGLIA IN CUI INSERIRE k
- SE TALE FOGLIA NON È PIENA, SI INSERISCA k NEL POSTO OPPORTUNO
- ALTRIMENTI



- INSERIRE k OVE OPPORTUNO IN B_1 O B_2
- INSERIRE CHIAVE \circ IN A RICORSIVAMENTE

- PER EVITARE LA POSSIBILE RISALITA FINO ALLA RADICE, SI FARA' IN MODO DI SUDDIVIDERE I NODI PIENI NON APPENA VENGONO INCONTRATI DURANTE LA FASE DI LOCALIZZAZIONE DELLA FOGLIA IN CUI INSERIRE LA NUOVA CHIAVE k .
- A TAL FINE SI UTILIZZERA' LA PROCEDURA AUSILIARIA $B\text{-TREE-SPLIT-CHILD}(x, i)$ CON
 - x : PUNTATORE AD UN NODO NON PIENO
 - i : INDICE TALE CHE $c_i[x]$ SIA PIENO
- L'EFFETTO SARA' DI SPEZZARE IL NODO $c_i[x]$ IN DUE NODI $c_i[x]$ E z

B-TREE-SPLIT-CHILD(x, i)

$y := c_i(x)$

$z := \text{ALLOCATE-NODE}()$

$\text{leaf}[z] := \text{leaf}[y]$

$n[z] := t-1$

for $j := 1$ to $t-1$ do

$\text{key}_j[z] := \text{key}_{j+t}[y]$

if not $\text{leaf}[y]$ then

for $j := 1$ to t do

$c_j[z] := c_{j+t}[y]$

$n[y] := t-1$

for $j := m[x]+1$ downto $i+1$ do

$c_{j+1}[x] := c_j[z]$

$c_{i+1}[x] := z$

for $j := n[x]$ downto i do
 $\text{key}_{j+1}[x] := \text{key}_j[x]$

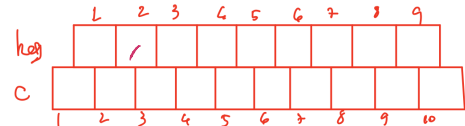
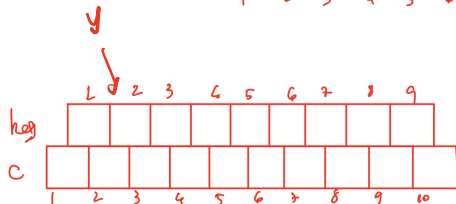
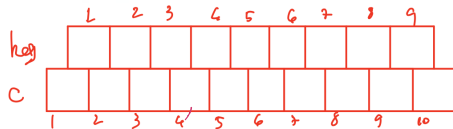
$\text{key}_i[x] := \text{key}_t[y]$

$n[x] := n[x] + 1$

DISK-WRITE(y);

DISK-WRITE(z);

DISK-WRITE(x)



COMPLESSITA' DI B-TREE-SPLIT-CHILD(x, i)

① (1) ACCESSI AL DISCO

② (t) TEMPO DI CPU

B-TREE-INSERT-NONFULL (x, k)

$i := n[x]$

if leaf(x) then

while $i > 1$ and $k < key_i[x]$ do

$key_{i+1}[x] := key_i[x]; i := i - 1;$

$key_i[x] := k$

$n[x] := n[x] + 1$

DISK-WRITE (x)

else

while $i > 1$ and $k < key_i[x]$ do

$i := i - 1$

$i := i + 1$

DISK-READ ($c_i[x]$)

if $n[c_i[x]] = 2t - 1$ then

B-TREE-SPLIT-CHILD (x, i)

if $k > key_i[x]$ then

$i := i + 1$

B-TREE-INSERT-NONFULL ($c_i[x], k$)

COMPLESSITÀ DI B-TREE-INSERT-NONFULL (z, b)

$$O(h) = O(\log_t n) \quad \text{ACCESSI AL DISCO}$$

$$O(th) = O(t \log_t n) \quad \text{TEMPO DI CPU}$$

- SI OSSERVI CHE NONOSTANTE LA PROCEDURA SIA RICORSIVA (MA CON SEMPLICE RICORSIVITÀ DI CODA) IL NUMERO DI PAGINE CHE AD OGNI ISTANTE DEBONO RISIEDERE IN MEMORIA PRINCIPALE È $O(1)$

B-TREE-INSERT (T, k)

$r := \text{root}[T]$

if $n[r] = 2t - 1$ then

$s := \text{ALLOCATE-NODE}()$

$\text{root}[T] := s$

$\text{leaf}[s] := \text{FALSE}$

$n[s] := 0$

$c_1[s] := r$

B-TREE-SPLIT-CHILD ($s, 1$)

B-TREE-INSERT-NONFULL (s, k)

else

B-TREE-INSERT-NONFULL (r, k)

COMPLESSITÀ DI B-TREE-INSERT (T, k)

$$\Theta(h) = \Theta(\log_t n)$$

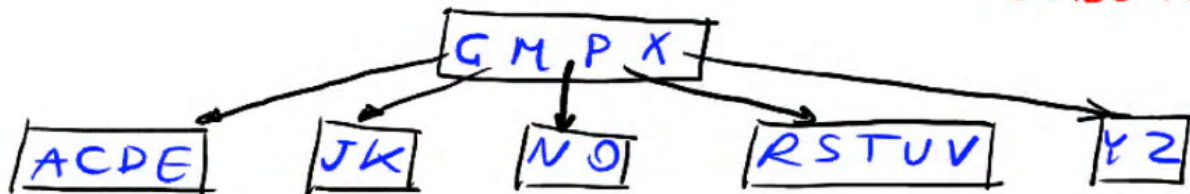
ACCESSI AL DISCO

$$O(th) = O(t \log_t n)$$

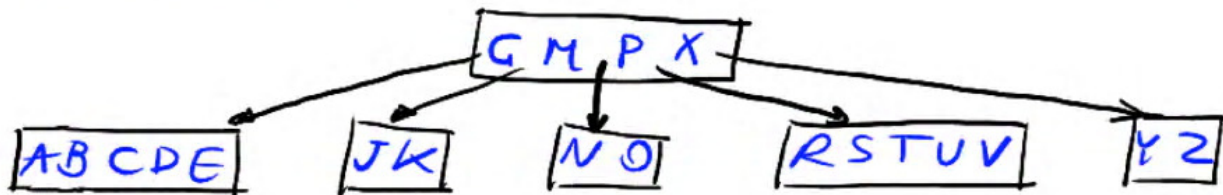
TEMPO DI CPU

ESEMPIO

B-TREE DI
GRADO MINIMO 3

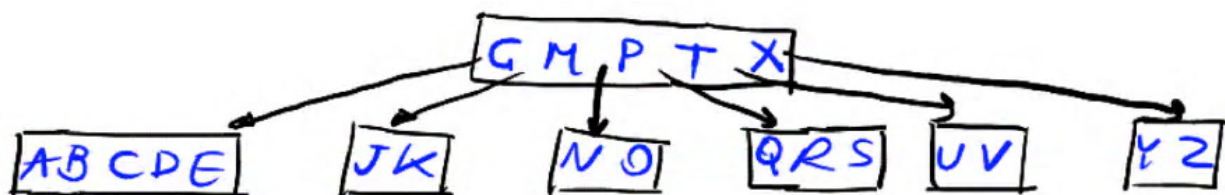


• INSERIMENTO DI B



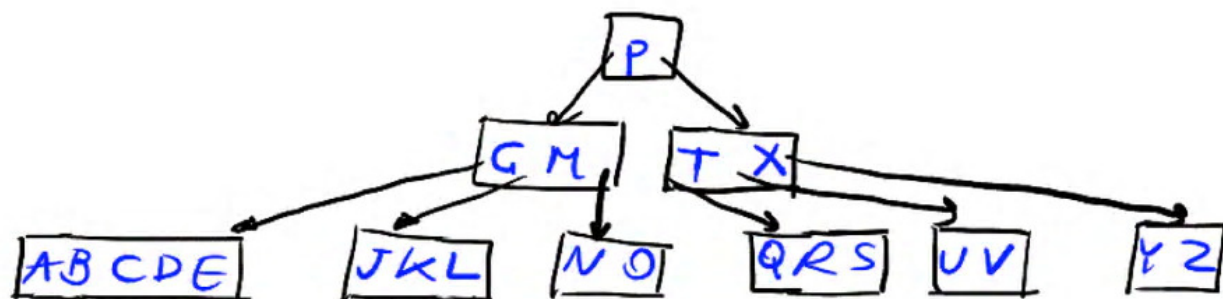
• INSERIMENTO DI Q





- INSERIMENTO DI L





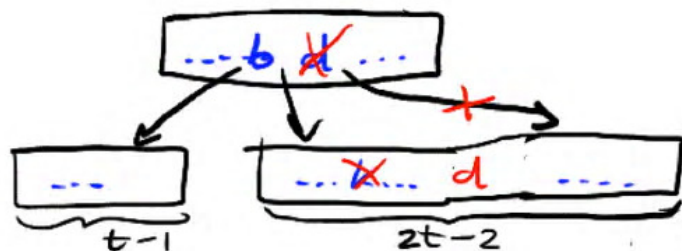
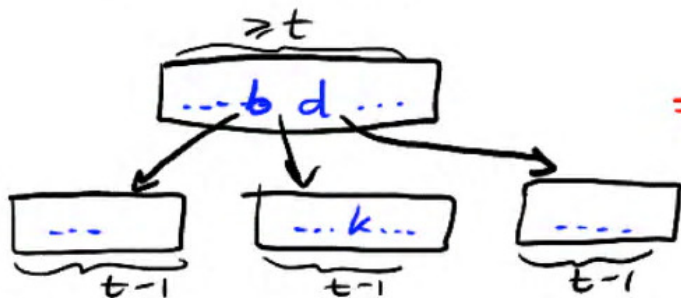
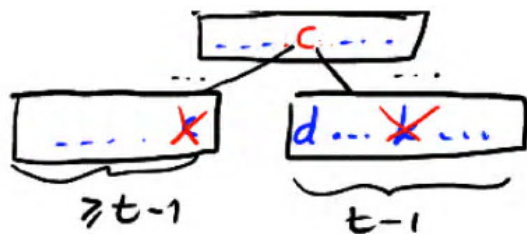
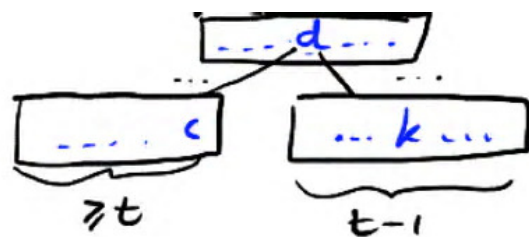
• INSERIMENTO DI F



CANCELLAZIONE DI UNA CHIAVE DA UN B-TREE

PROCEDURA NATURALE (DUE POSSIBILI PASSATE, ANCHE QUANDO LA CHIAVE DA CANCELLARE RISIETE SU UNA FOGLIA)

- SI CHIAMA B-TREE-SEARCH ($root[T], k$) PER LOCALIZZARE IL NODO CHE CONTIENE LA CHIAVE k
- SE TALE NODO E' UNA FOGLIA CON ALMENO t CHIAVI (CIOE' SE TALE NODO NON E' **MAGRO**) SI CANCELLI LA CHIAVE k
- SE INVECE TALE NODO E' UNA FOGLIA "MAGRA" SI FARA' CEDERE UNA CHIAVE DA UNA FOGLIA SORELLA (SE POSSIBILE) OPPURE DAL NODO PADRE, CONTESTUALMENTE UNENDOSI AD UNA FOGLIA SORELLA. TALE PROCESSO POTREBBE PROPAGARSI FINO ALLA RADICE



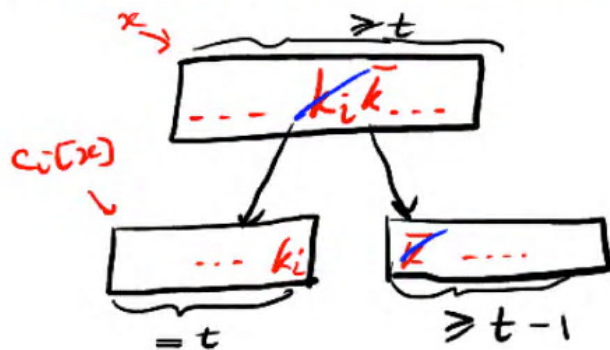
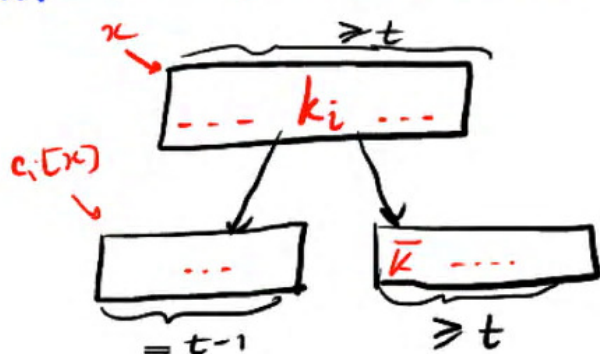
- SE IL NODO CONTENENTE LA CHIAVE k È INVECE UN NODO INTERNO, SI SOSTITUISCA k CON LA CHIAVE IMMEDIATAMENTE PIÙ PICCOLA (O PIÙ GRANDE) DI k E SI CANCELLI IL PREDECESSORE (O SUCCESSORE) DI k , CHE RISIEDERÀ SICURAMENTE SU UNA FOGLIA

- PER EVITARE LA POSSIBILE RISALITA (ALMENO IN QUEI CASI IN CUI LA CHIAVE DA CANCELLARE RISIEDA SU UNA FOGLIA - CASO PIU' PROBABILE) SI FARA' IN MODO CHE I NODI SUL CAMMINO DALLA RADICE AL NODO CONTENENTE k NON SIANO MAGRI (AD ECCEZIONE DELLA RADICE)
- PERTANTO, IN QUANTO SEGUE SUPPORREMO CHE IL NODO x IN ESAME NON SIA MAGRO (A MENO CHE NON SI TRATTI DELLA RADICE)
- INOLTRE, SUPPORREMO CHE SE LA RADICE RIMANE SENZA ALCUNA CHIAVE, QUESTA VIENE DEALLOCATA

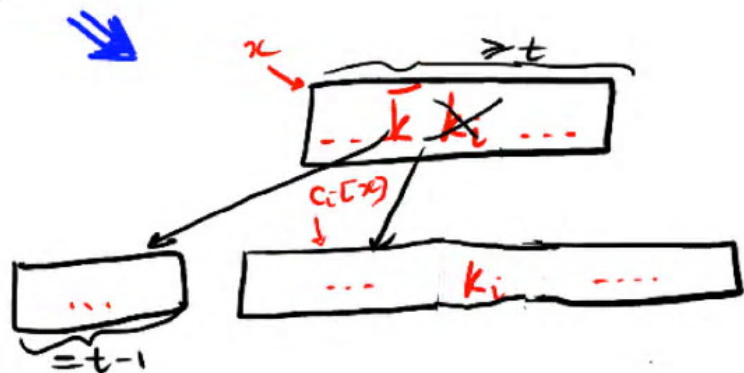
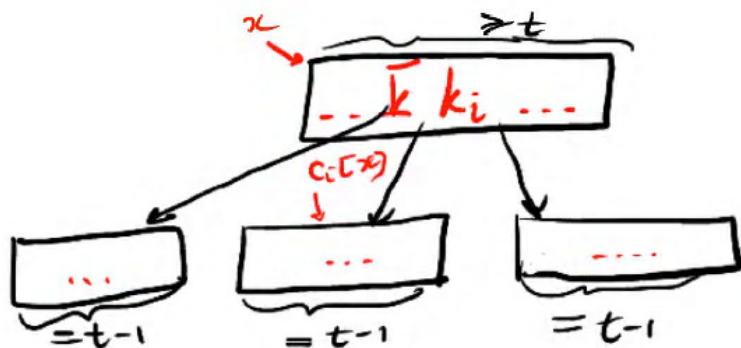
1. SE k E' NEL NODO x ED x E' UNA FOGLIA,
SI CANCELLI k DA x
2. SE k E' NEL NODO x ED x E' UN NODO
INTERNO
 - a. SE IL FIGLIO y DI x CHE PRECEDE k HA ALMENO
 t CHIAVI, SI DETERMINI IL PREDECESSORE k' DI k NEL
SOTTOALBERO RADICATO IN y .
SI CANCELLI RICORSIVAMENTE k' E SI SOSTITUISCA
 k CON k'
 - b. SITUAZIONE SIMMETRICA DI a. PER IL FIGLIO z DI x
CHE SEGUE k
 - c. ALTRIMENTI, SE SIA y CHE z HANNO $t-1$ FIGLI, SI
SI UNISCA k E IL NODO x A y , SI CANCELLI k
DA x , SI DEALLOCHI z , SI CANCELLI RICORSIVAMENTE
 k DA y

3. SE LA CHIAVE k NON È PRESENTE NEL NODO INTERNO x , SI DETERMINI LA RADICE $c_i[x]$ DEL SOTTOALBERO DI x CHE CONTIENE k .
 SE $c_i[x]$ È MAGRO, SI ESEGUA IL PASSO 3.a O 3.b E QUINDI RICORSIVAMENTE SI RIMUOVA LA CHIAVE k DAL SOTTOALBERO CHE LA CONTIENE

a. SE $c_i[x]$ HA UN FRATELLO IMMEDIATO NON MAGRO



b. SE ENTRAMBI I FRATELLI IMMEDIATI DI $c_i(x)$ SONO MAGGIORI



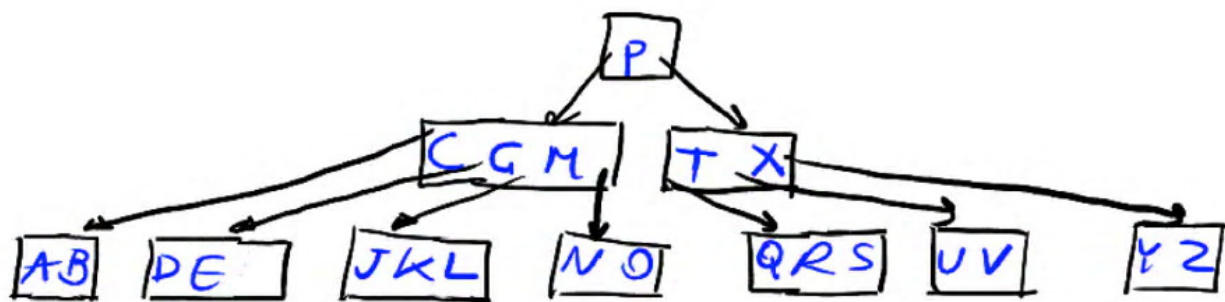
ALTRIMENTI, SE $c_i[x]$ NON E' MAGRO, SI
PROCEDA RICORSIVAMENTE A CANCELLARE LA
CHIAVE k A PARTIRE DAL NODO $c_i[x]$,

ESEMPIO

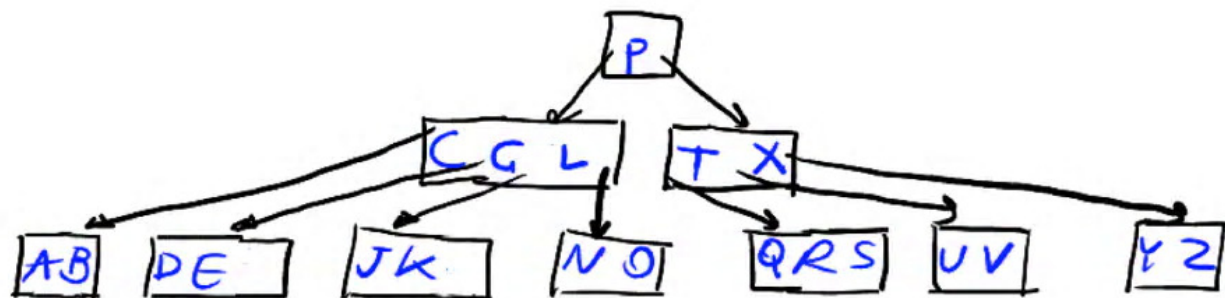


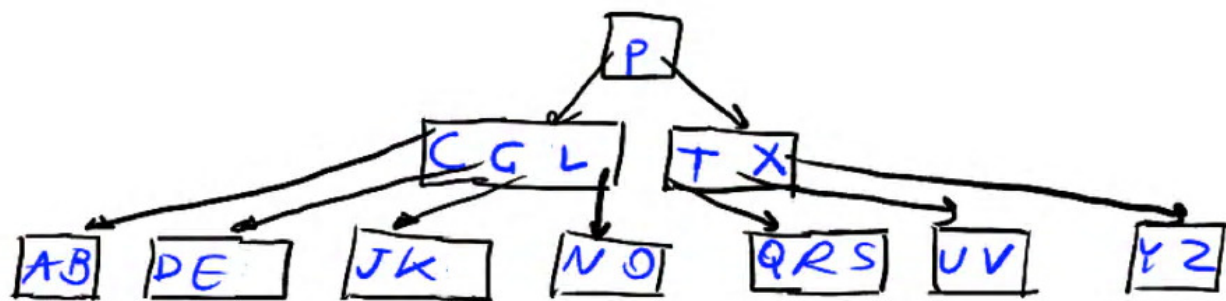
- CANCELLAZIONE DI F (CASO 1)



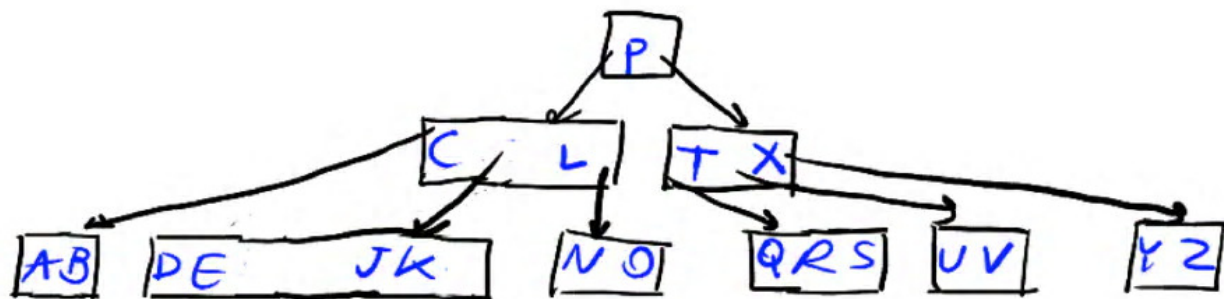


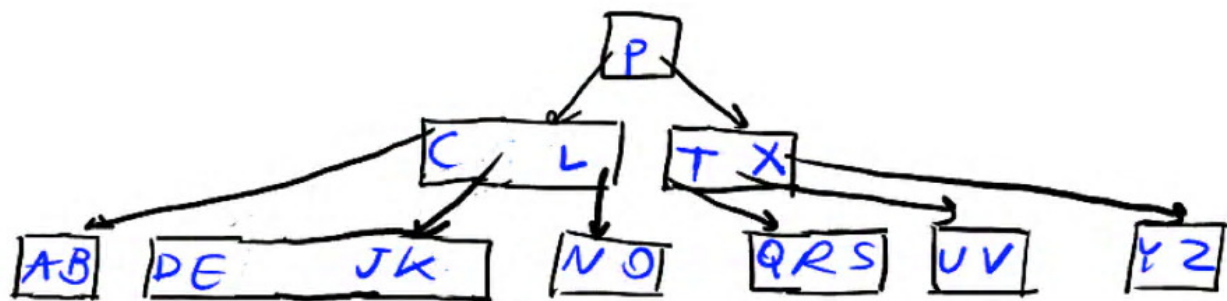
- CANCELLAZIONE DI M (CASO 2a)





- CANCELLAZIONE DI G (CASO 2C)





- CANCELLAZIONE DI D (CASO 3b)





- CANCELLAZIONE DI B (CASO 3a)

