

***MINIMUM SPANNING TREES***

***E LORO SEGNAURA***

## DIFFERENZA SIMMETRICA

$$A \Delta B =_{\text{def}} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

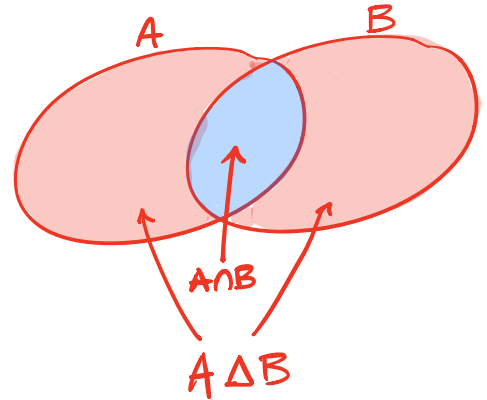
$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$$

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

- SE  $|A| = |B|$ , ALLORA

$$|A \Delta B| = 2 \cdot (|A| - |A \cap B|)$$



## DISTANZA TRA DUE SPANNING TREE

- SIANO  $\mathcal{T}_1 = (V, T_1)$  E  $\mathcal{T}_2 = (V, T_2)$  SPANNING TREE DI UN MEDESIMO GRAFO CONNESSO  $G = (V, E)$ .

DEFINIAMO LA DISTANZA TRA  $\mathcal{T}_1$  E  $\mathcal{T}_2$  (E TRA  $T_1$  E  $T_2$ )

PONENDO

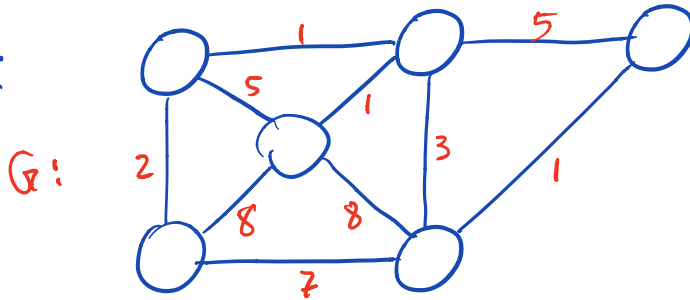
$$d(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) := d(T_1, T_2) := \frac{|T_1 \Delta T_2|}{2}$$

## SEGNATURA DI UN MST

- SIA  $G=(V,E)$  UN GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO  
E SIA  $w:E \rightarrow \mathbb{R}$  UNA FUNZIONE PESO SU  $G$

- LA SEGNATURA  $\Sigma(G)$  DI  $G$  E' LA SEQUENZA ORDINATA  
IN ORDINE NON DECRESCENTE DEI PESI DEGLI ARCHI  
DI  $G$

ES.



$$\Sigma(G) = (1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 7, 8, 8)$$

# UNICITA' DELLA SEGNAURA DEGLI MST

TEOREMA DUE QUALUNQUE MST DI UNO STESSO GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO HANNO LA STESSA SEGNAURA.

## DIMOSTRAZIONE

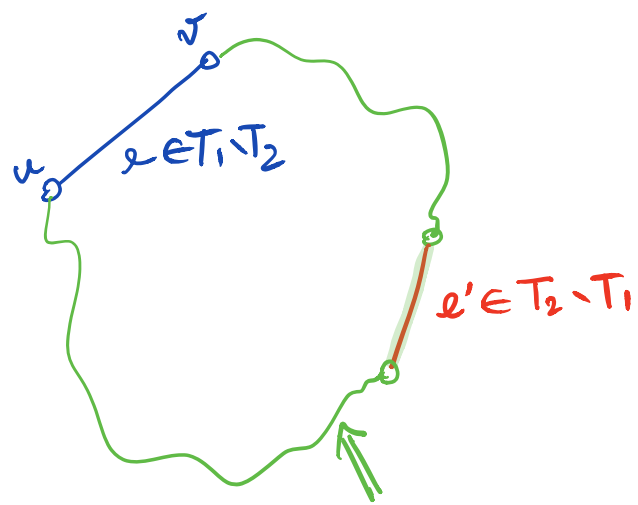
- PROCEDIAMO PER ASSURDO

- SIA  $(G, w)$  UN GRAFO NON ORIENTATO CONNESSO E PESATO, CON  $G = (V, E)$  E  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ , CONTENENTE PIU' MST CON SEGNAURE DISTINTE

- IN PARTICOLARE, SIANO  $T_1 = (V, T_1)$  E  $T_2 = (V, T_2)$  DUE MST DI  $G$  CON SEGNAURE DISTINTE E TALI CHE LA DISTANZA  $d(T_1, T_2)$  SIA MINIMA

- SIA  $e = (u, v)$  UN ARCO DI PESO MINIMO IN  $T_1 \Delta T_2$ :  
SENZA PERDITA DI GENERALITA', POSSIAMO SUPPORRE CHE  
 $e \in T_1$  E  $e \notin T_2$

- SIA  $\pi$  UN CAMMINO IN  $\Sigma_2$  DA  $u$  A  $v$  E SIA  $e'$  UN ARCO IN  $\pi$  TALE CHE  $e' \in T_2$  E  $e' \notin T_1$



- PER LA MINIMALITA' DI  $w(e)$  IN  $T_1 \Delta T_2$ , SI HA  $w(e) \leq w(e')$

$\pi$ : CAMMINO IN  $\Sigma_2$  DA  $u$  A  $v$

- PERTANTO, POSTO  $T_2' = (T_2 \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ , SI HA CHE

•  $\mathcal{T}'_2 = (V, T_2')$  E' UNO SPANNING TREE DI  $G$ , E

•  $w(T_2) \leq w(T_2') = w(T_2) - w(e') + w(e) \leq w(T_2)$ ,

DA CUI  $w(T_2') = w(T_2)$  E QUINDI  $w(e) = w(e')$ .

DUINQUE ANCHE  $\mathcal{T}'_2 = (V, T_2')$  E' UN MST DI  $G$

- SI NOTI INOLTRE CHE:

- $\sum(T'_2) = \sum(T_2) \neq \sum(T_1)$  (IN QUANTO  $w(e) = w(e')$ )
- $T_1 \Delta T'_2 = (T_1 \Delta T_2) \setminus \{e, e'\}$ , E QUINDI

$$d(T_1, T'_2) = \frac{|T_1 \Delta T'_2|}{2} = \frac{|T_1 \Delta T_2|}{2} - 1 < d(T_1, T_2),$$

CONTRADDICENDO LA MINIMALITA' DI  $d(T_1, T_2)$

- LA CONTRADDIZIONE PROVIENE DALL' AVER SUPPOSTO CHE POTESSERO ESISTERE GRAFI PESATI NON ORIENTATI E CONNESSI DOTATI DI MST CON SEGNATURE DISTINTE.
- PERTANTO IL TEOREMA RISULTA DIMOSTRATO. ■

## MINIMALITA' DELLA SEGNAURA DI UN MST

- SIANO  $\sigma$  E  $\sigma'$  SEGNAURE DI SPANNING TREE DI UN MEDESIMO GRAFO.

PONIAMO:

$\sigma < \sigma'$  SSE  $\sigma$  PRECEDE  $\sigma'$  LESSICOGRAFICAMENTE

CIOE' SSE, POSTO  $\sigma = (s_1, \dots, s_k)$  E  $\sigma' = (s'_1, \dots, s'_k)$ , SI HA:

$$s_1 = s'_1, s_2 = s'_2, \dots, s_{l-1} = s'_{l-1}, s_l < s'_l$$

PER QUALCHE  $1 \leq l < k$ .

T MST  $\Rightarrow$  SEGNAURA MINIMA



TEOREMA UNO SPANNING TREE E' UN MST SE E SOLO SE  
LA SUA SEGNAURA E' MINIMA

DIMOSTRAZIONE

( $\Rightarrow$ )

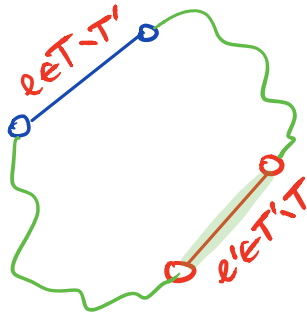
PROCEDIAMO PER ASSURDO, SUPPONENDO CHE ESISTA UN GRAFO  
PESATO  $(G, w)$  NON ORIENTATO E CONNESSO, CON  $G = (V, E)$ ,  
I CUI MST HANNO UNA SEGNAURA  $\sigma$  NON MINIMA.

- SIA  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ , CON  $\mathcal{T} = (V, T)$  E  $\mathcal{T}' = (V, T')$ , UNA COPPIA DI  
SPANNING TREE TALI CHE:

- $\mathcal{T}$  SIA UN MST
- $\sigma' := \sum(\mathcal{T}') < \sum(\mathcal{T}) = \sigma$
- $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$  SIA MINIMA

- SIA  $e \in T \Delta T'$  DI PESO MINIMO, CON  $e = (u, v)$

CASO  $e \in T \setminus T'$ :



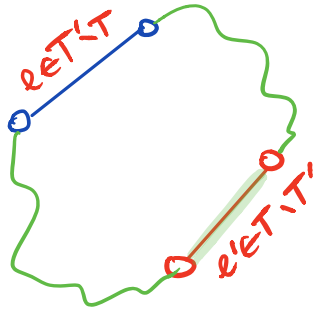
SIA  $e'$  UN ARCO SUL CAMMINO DA  $u$  A  $v$  IN  $T'$  TALE CHE  $e' \in T' \setminus T$ .

AL SOLITO,  $(T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$  È UNO SPANNING TREE DI  $G = (V, E)$ .  
PER LA MINIMALITÀ DI  $w(e)$  SI HA

$$\Sigma((T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) \leq \Sigma(T') < \Sigma(T)$$

INOLTRE,  $d((T' \setminus \{e'\}) \cup \{e\}, T) < d(T', T)$ , CONTRADDICENDO LA  
MINIMALITÀ DI  $d(T', T)$ .

CASO  $e \in T' \setminus T$  :



SIA  $e'$  UN ARCO SUL CAMMINO DA  $u$  A  $v$  IN  $T$  TALE CHE  $e' \in T \setminus T'$ .

AL SOLITO,  $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$  È UNO SPANNING TREE DI  $G = (V, E)$ .  
PER LA MINIMALITÀ DI  $w(e)$  SI HA

$$w((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) \leq w(T)$$

E QUINDI  $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$  È UN MST E  $w(e) = w(e')$ .

SI HA DUNQUE:  $\sum(T') < \sum(T) = \sum((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ .

INOLTRE,  $d(T', (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) < d(T', T)$ , E DUNQUE LA COPPIA  $(T', (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$  CONTRADDIREBBE LA MINIMALITÀ DI  $d(T', T)$ .

( $\Leftarrow$ )

SIA  $\mathcal{T}$  UNO SPANNING TREE DI  $G$  CON SEGNAURA MINIMA E SIA  $\mathcal{T}'$  UN MST DI  $G$ .

PER LA PRIMA PARTE DEL TEOREMA, LA SEGNAURA

DI  $\mathcal{T}'$  E' MINIMA, DUNQUE  $\sum(\mathcal{T}) = \sum(\mathcal{T}')$ ,

DA CUI SEGUE BANALMENTE CHE  $w(\mathcal{T}) = w(\mathcal{T}')$ .

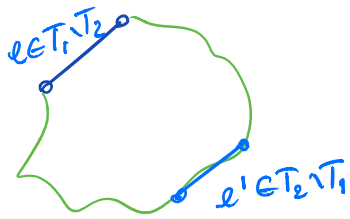
PERTANTO ANCHE  $\mathcal{T}$  E' UN MST, ■

$T_1, T_2$  spanning tree such that

$$\boxed{\sum(T_1) = \sum(T_2)}$$

such that  $d(T_1, T_2)$  is minimum.

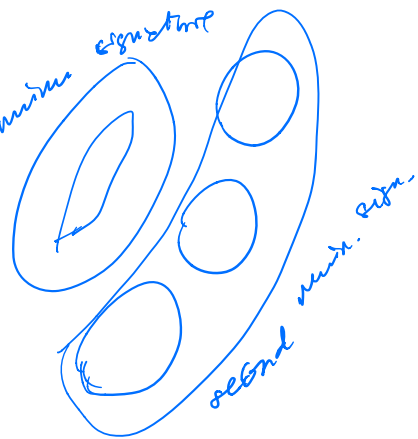
let  $e \in T_1 \Delta T_2$  of minimum weight



$$\text{Cons. } T'_2 := (T_2 - \{e'\}) \cup \{e\}$$

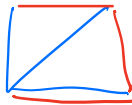
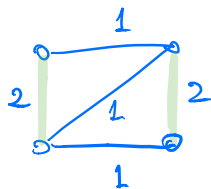
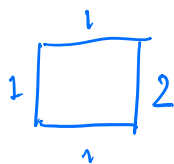
$$\sum(T'_2) \leq \sum(T_2)$$

minimum signature



$T_1$

$T_2$



$T_1$  ST minimum signature

Seu  $T$  um ST com assinatura minima

Seu  $T'$  um MST  $\rightarrow T'$  ha assinatura minima

$\rightarrow T$  e  $T'$  hanno la stessa assinatura,  $\rightarrow T$  e um MST.