ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'**aggregazione** e del **potenziale**, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 4i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 3 \\ 2 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 3^{\mathbb{N}}}}^{n} 4i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin 3^{\mathbb{N}}}}^{n} 2$$

$$\leq 4 \sum_{j=0}^{\lfloor \log_3 n \rfloor} 3^j + 2n$$

$$= 4 \cdot \frac{3^{\lfloor \log_3 n \rfloor + 1} - 1}{3 - 1} + 2n$$

$$\leq 4 \cdot \frac{3^{\log_3 n + 1} - 1}{2} + 2n$$

$$\leq 2 \cdot 3n - 2 + 2n$$

$$\leq 8n$$

$$\hat{c}_i = \frac{T(n)}{n} \leq 8$$

METODO DEL POTENZIALE

$$\frac{4 \cdot 3^{k+1}}{3^{k+1} - 3^{k}} = \frac{4 \cdot 3^{k+1}}{3^{k}(3-1)} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$\phi(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 6\left(i - 3^{\lfloor \log_3 i \rfloor}\right) & \text{se } i > 0 \end{cases}$$

SI OSSERVI CHE: $\phi(i) \geq \phi(0)$, $\forall i \geq 0$.

$\boxed{i \notin 3^{\mathbb{N}}}$

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i = 2 + 6\left(\cancel{i - 3^{\lfloor \log_3 i \rfloor}}\right) - 6\left(\cancel{i - 1 - 3^{\lfloor \log_3 (i-1) \rfloor}}\right)$$

$$= 8$$

$$\lfloor \log_3 i \rfloor = \lfloor \log_3 (i-1) \rfloor$$

$i \in 3^{\mathbb{N}} \wedge i = 1$

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i = 4 + 6\left(\cancel{1 - 3^{\lfloor \log_3 1 \rfloor}}\right) - 0 = 4$$

$i \in 3^{\mathbb{N}} \wedge i \neq 1$

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i = 4i + 6\left(\cancel{i - 3^{\lfloor \log_3 i \rfloor}}\right) - 6\left(i - 1 - 3^{\lfloor \log_3 (i-1) \rfloor}\right)$$

$$= 4i - 6\left(i - \frac{i}{3} - 1\right) = \cancel{4i} - 6 \cdot \cancel{\frac{2}{3} i} + 6$$

$$= 6$$

$$\lfloor \log_3 (i-1) \rfloor = \log_3 i - 1$$

$$3^{\lfloor \log_3 (i-1) \rfloor} = \frac{i}{3}$$

$$\sum c_i \le \sum \hat{c}_i \le 8n$$

ESERCIZIO 2

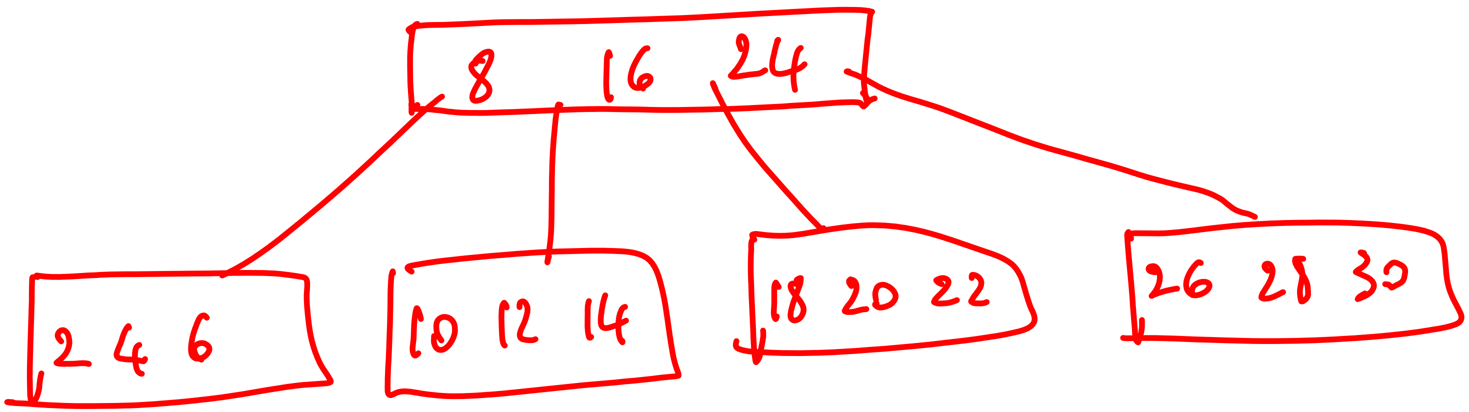
(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Sia $\mathcal{T}$ un B-tree di grado minimo dispari costituito da 5 nodi, ciascuno dei quali contiene esattamente 3 chiavi e sia $\{2i : 1 \leq i \leq 15\}$ l'insieme delle 15 chiavi contenute in $\mathcal{T}$.

Dopo aver determinato il grado minimo t del B-tree $\mathcal{T}$, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) DELETE(30)
(2) DELETE(28)
(3) DELETE(26)
(4) INSERT(19)
(5) INSERT(21)
(6) DELETE(18)

(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.



$t - 1 \leq 3$

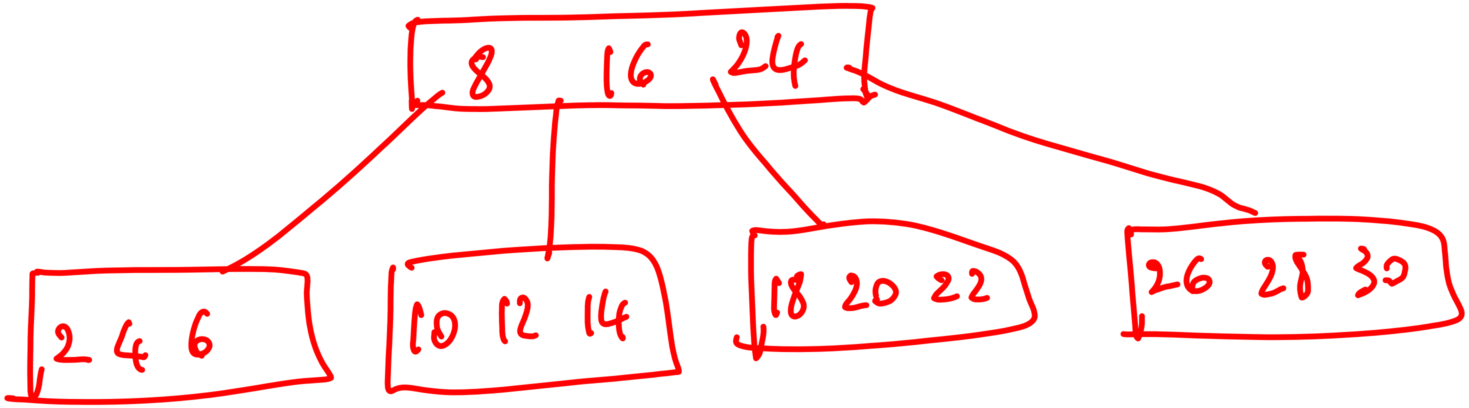
$t \leq 4$

$2t - 1 \geq 3$

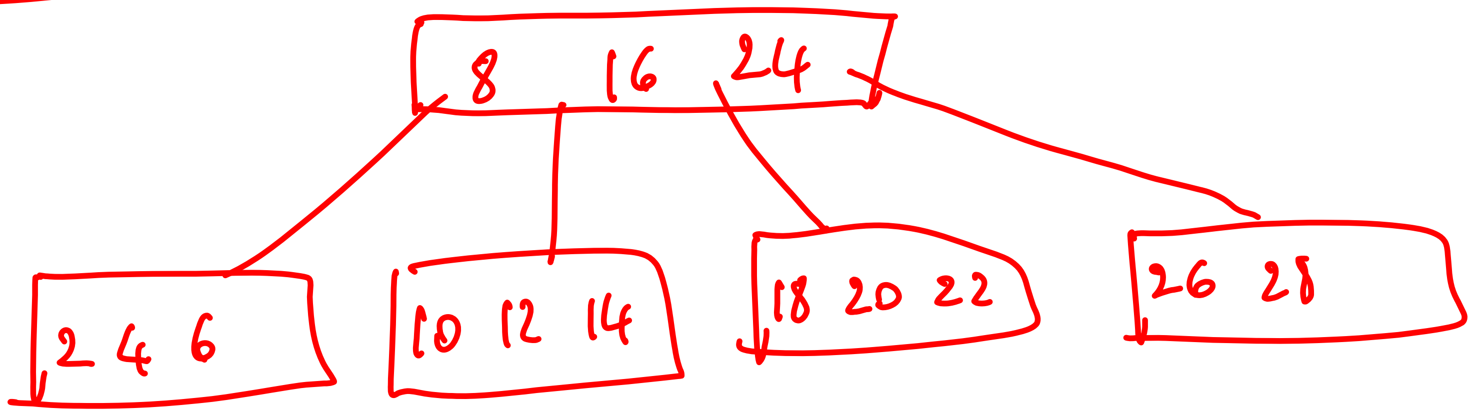
$2t \geq 4, \quad t \geq 2 \rightarrow$

t dispari $\longrightarrow t = 3$

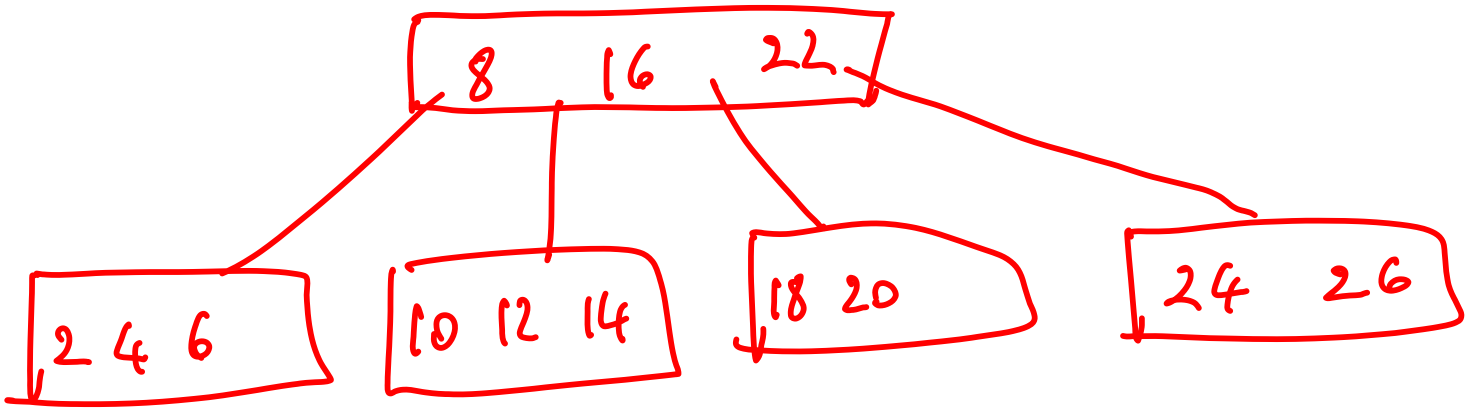
2 ≤ # child ≤ 5



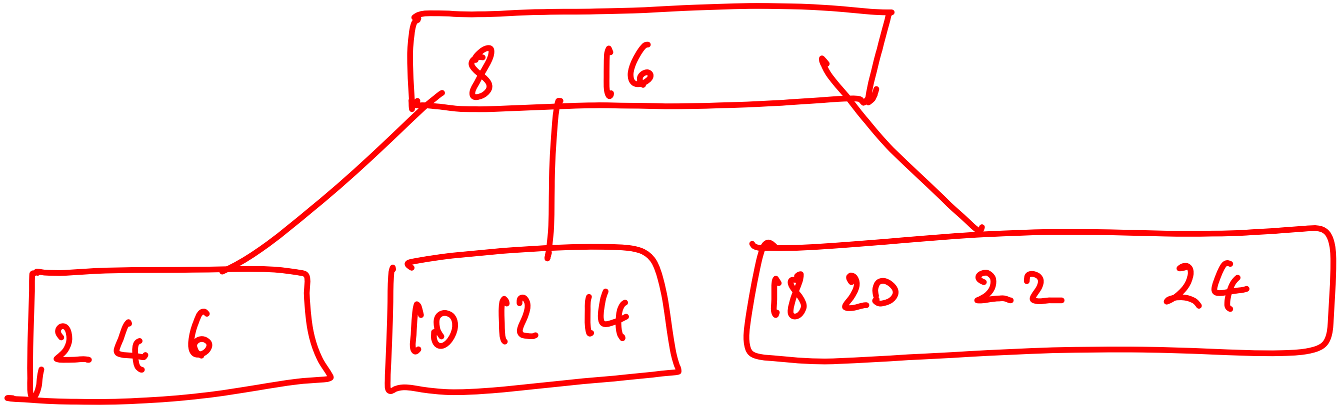
DELETE 30



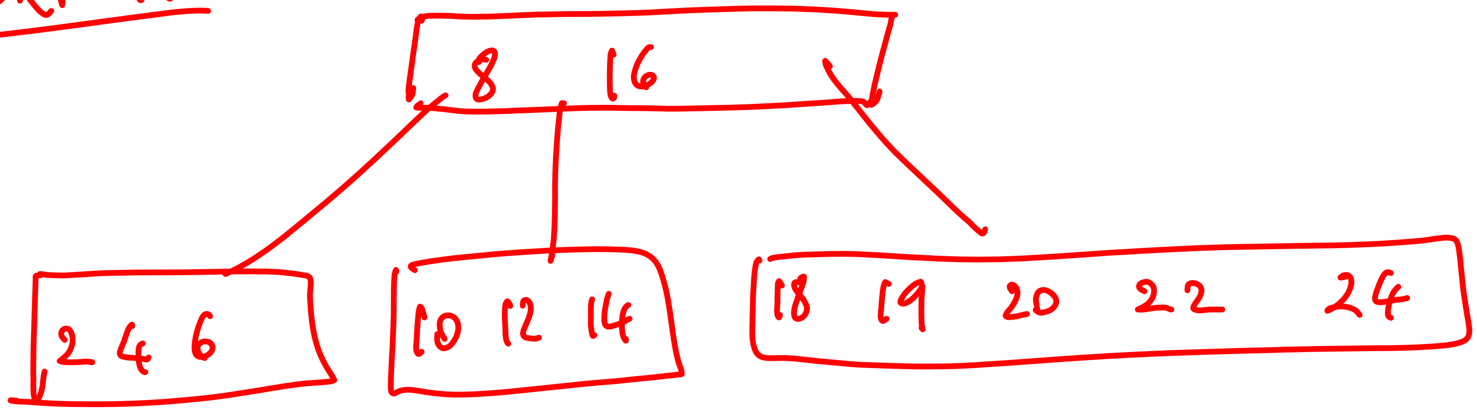
DELETE 28



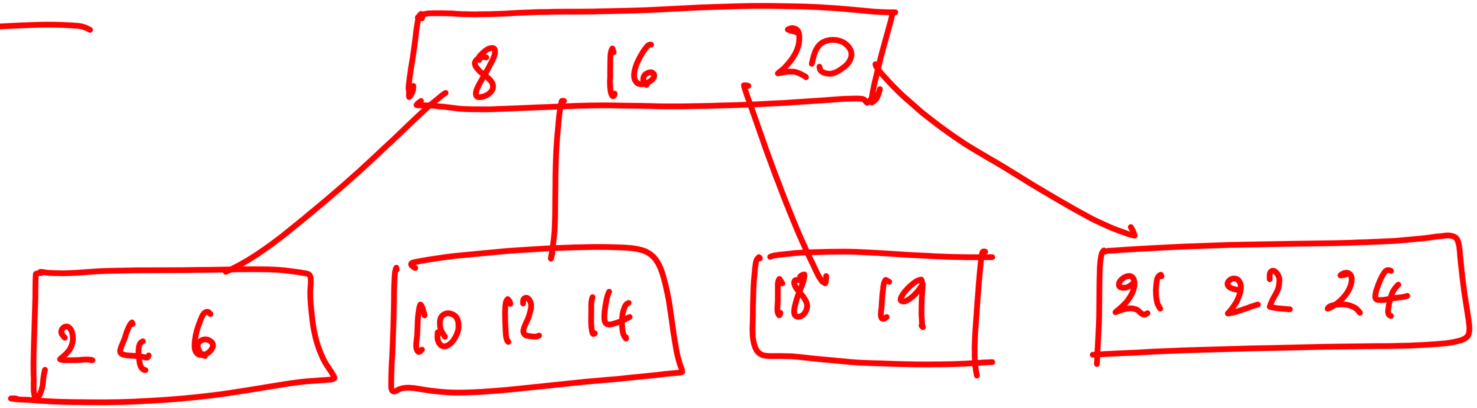
DELETE 26



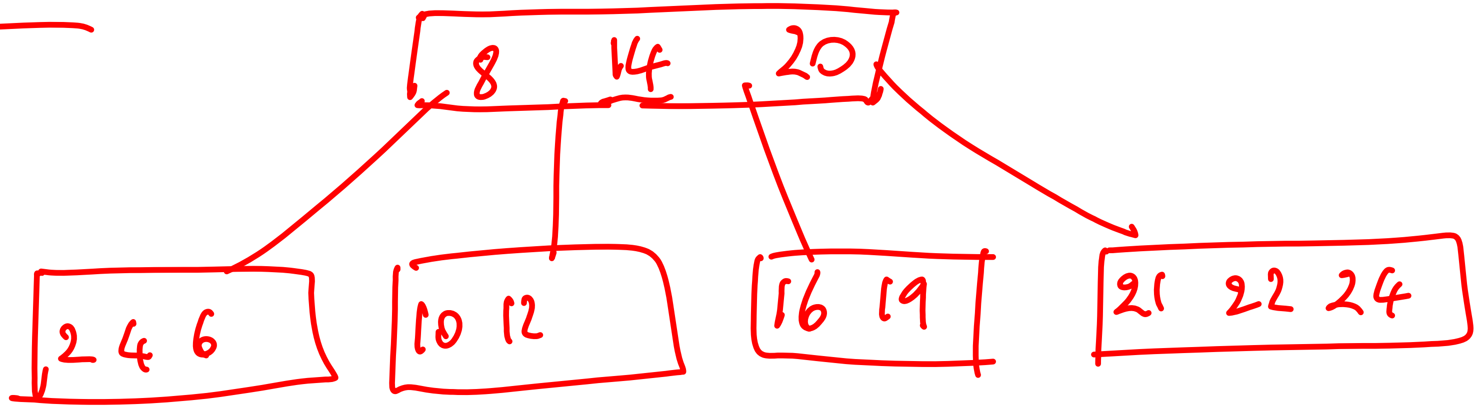
INSERT 19



INSERT 21



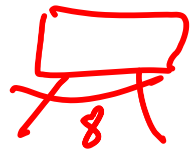
DELETE 18



$$\begin{array}{r} 32 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$\underbrace{h = 3}$ $\underbrace{t' = 4}$

	# children	
	→ 1	1
1	→ $2 \cdot 3$	6
2	→ $2 \cdot 3 \cdot 4$	24
3	→ $2 \cdot 3 \cdot 4^2$	96
		127



# children	# nodes
7	1
$8 \cdot 7$	8
$8^2 \cdot 7$	8^2
$8^3 \cdot 7$	8^3

$$\cancel{7} \cdot \frac{8^4 - 1}{\cancel{8-1}} = 4095$$

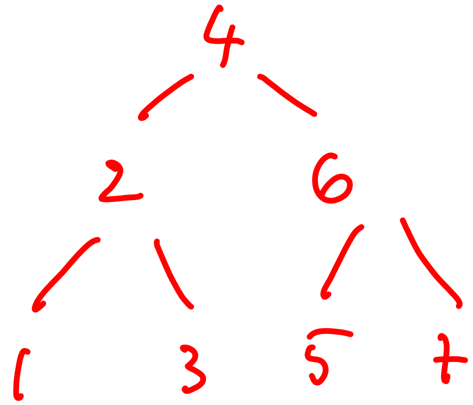
ESERCIZIO 3

Si descriva l'operazione ExtractMin sia nel contesto degli heap binomiali che in quello degli heap di Fibonacci, valutandone in entrambi i casi anche la complessità computazionale.

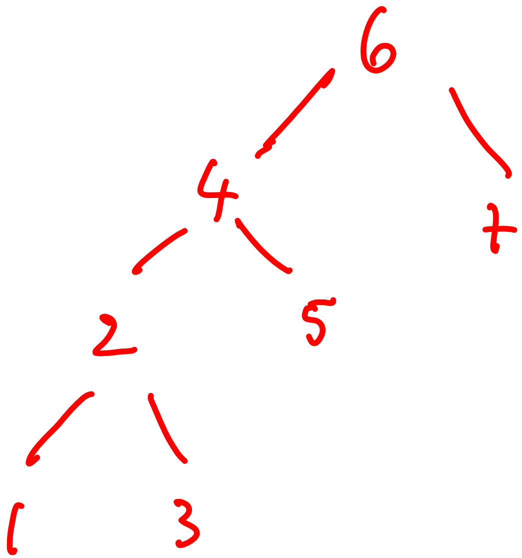
ESERCIZIO 4

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up. Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le chiavi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7:

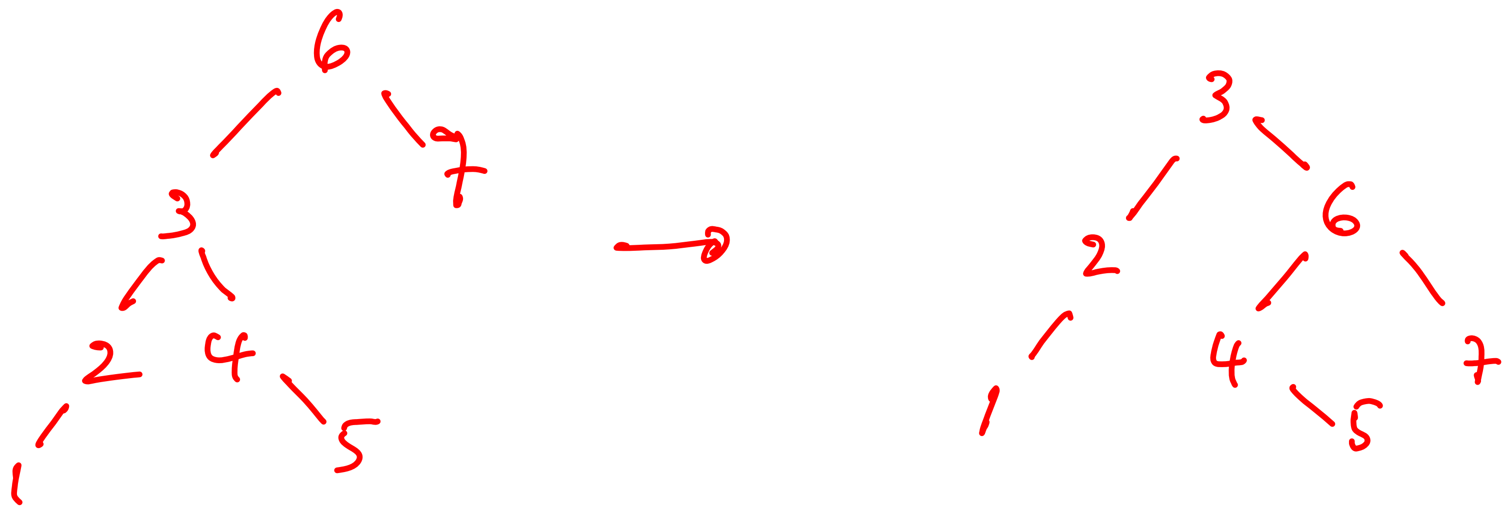
- SEARCH 6, 3, 1
- INSERT 8
- DELETE 3
- SEARCH 5



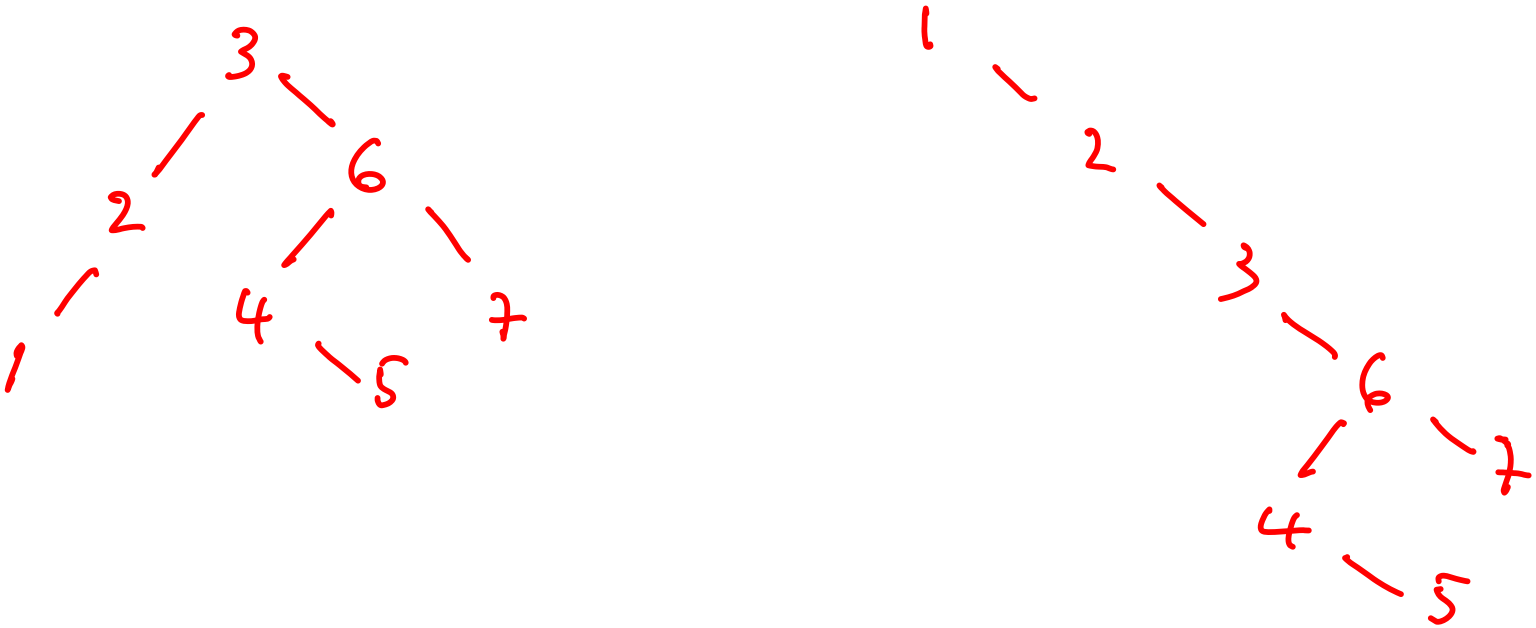
SEARCH 6



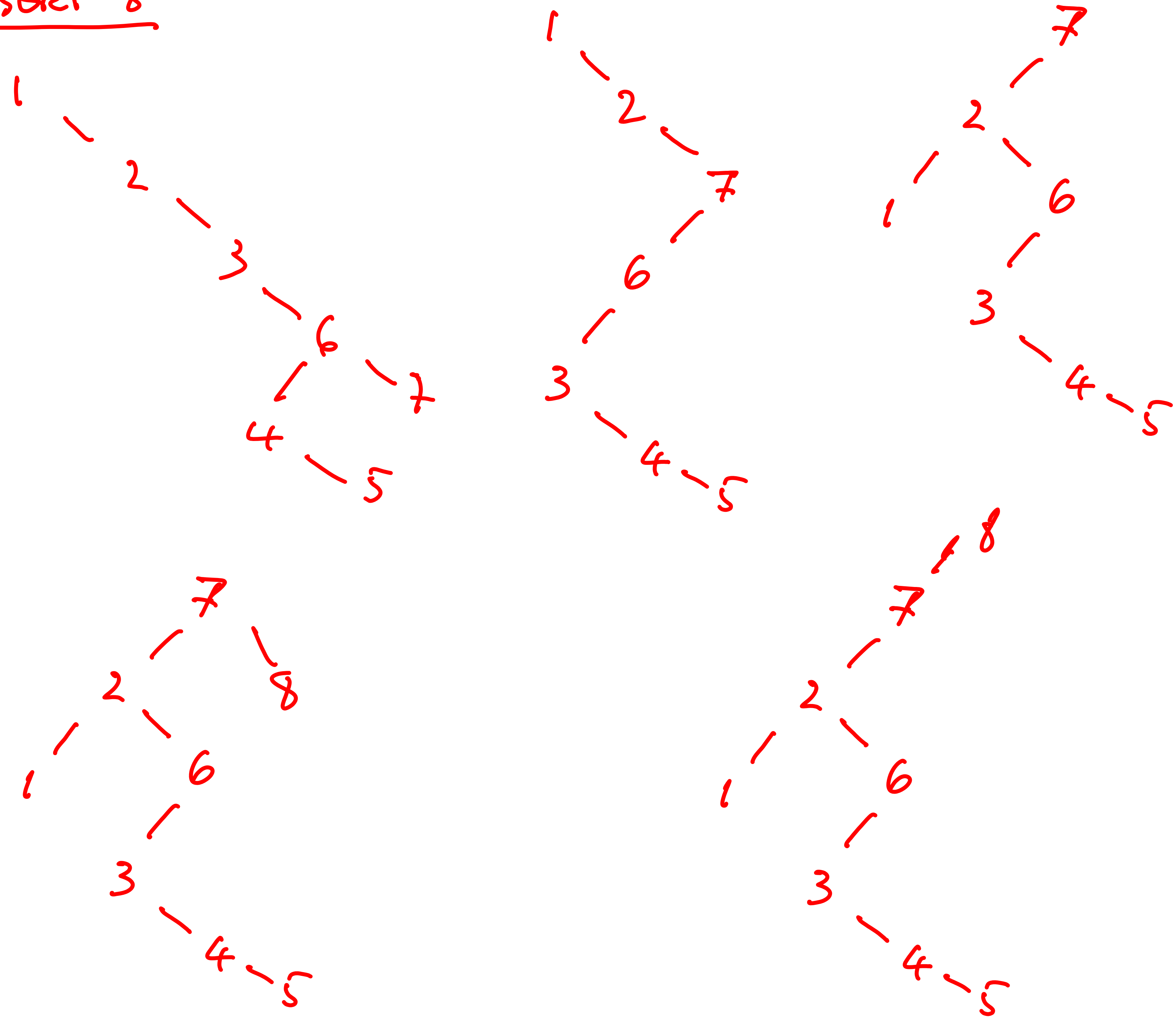
SEARCH 3



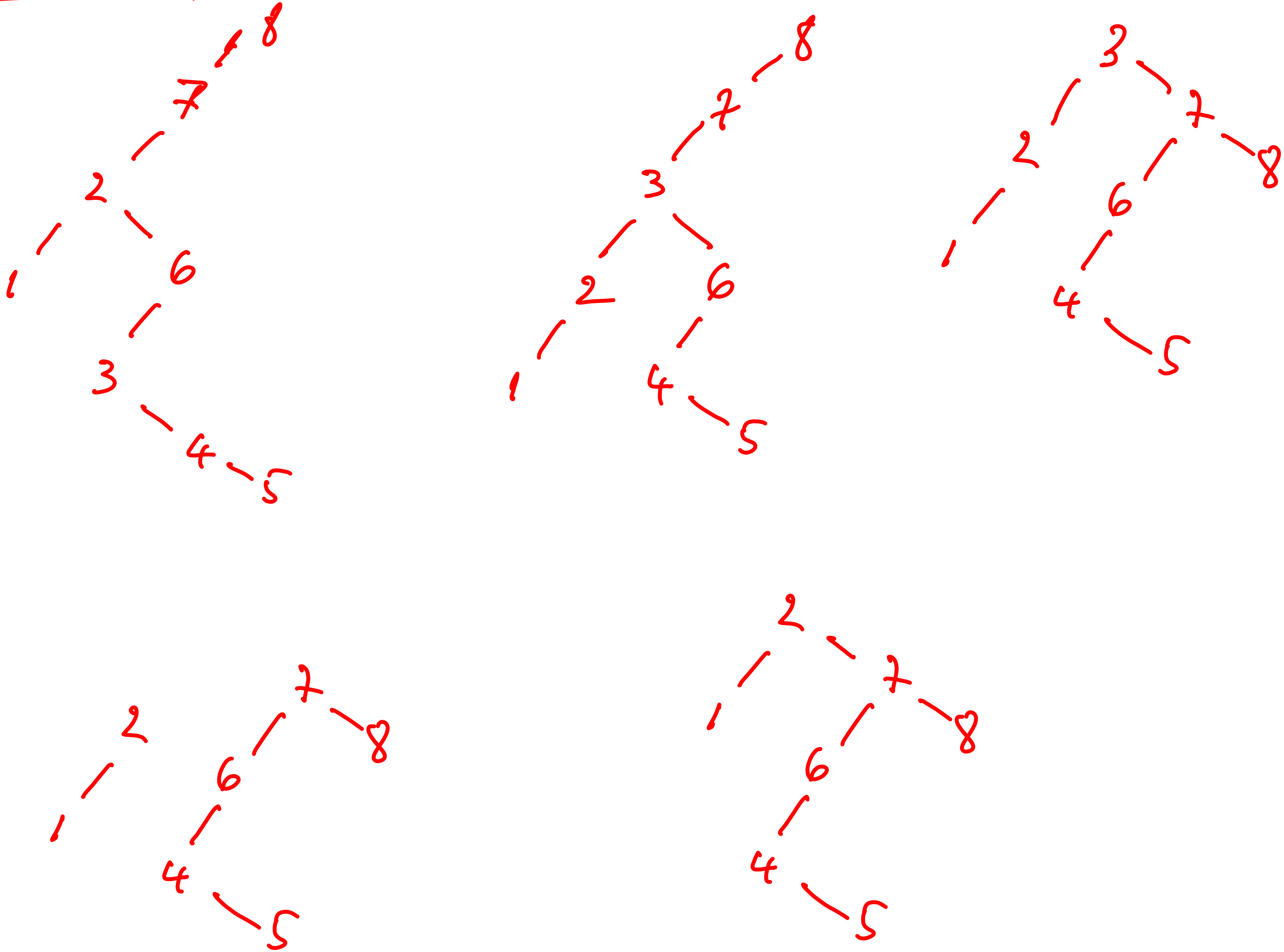
SEARCH 1



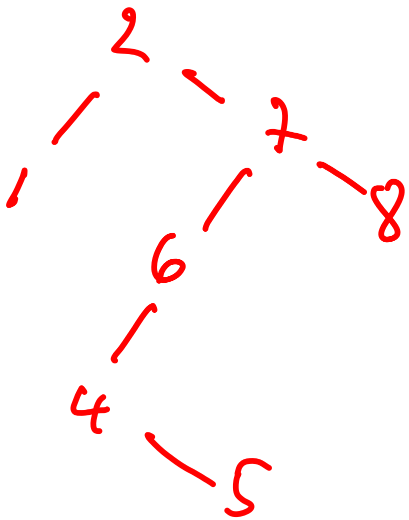
INSERT 8

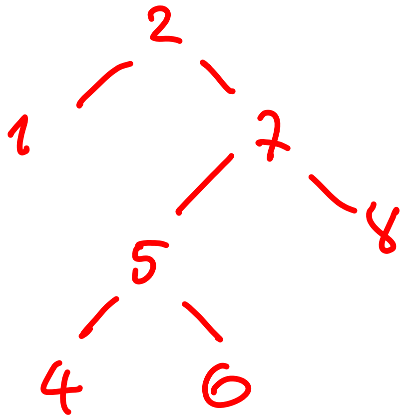


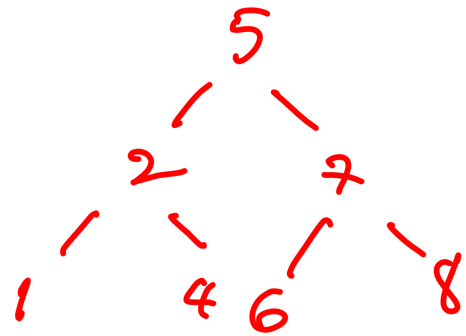
DELETE 3



SEARCH 5

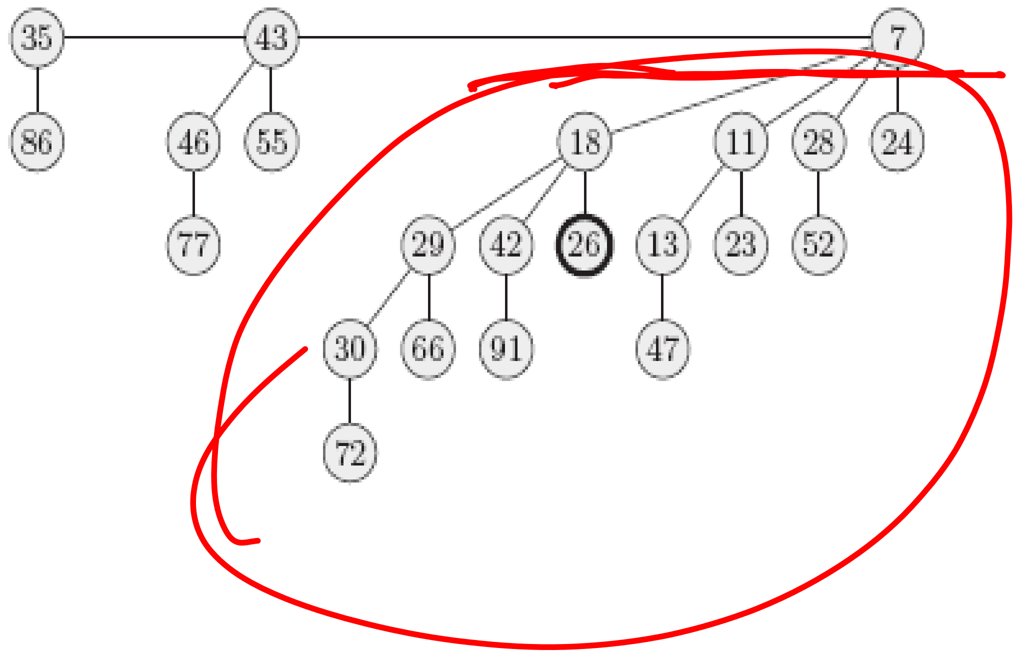




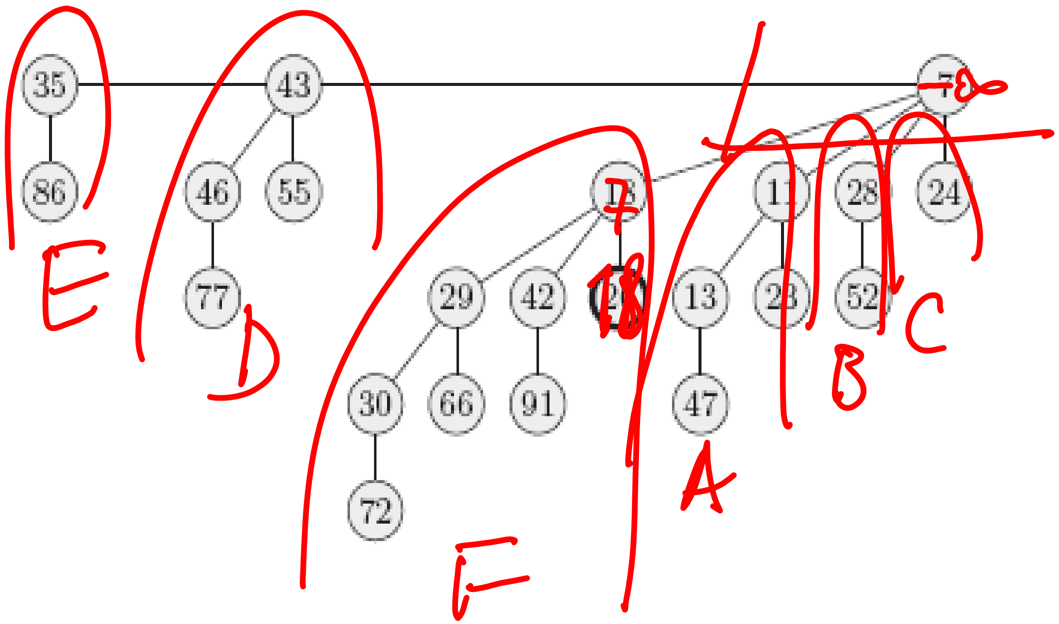


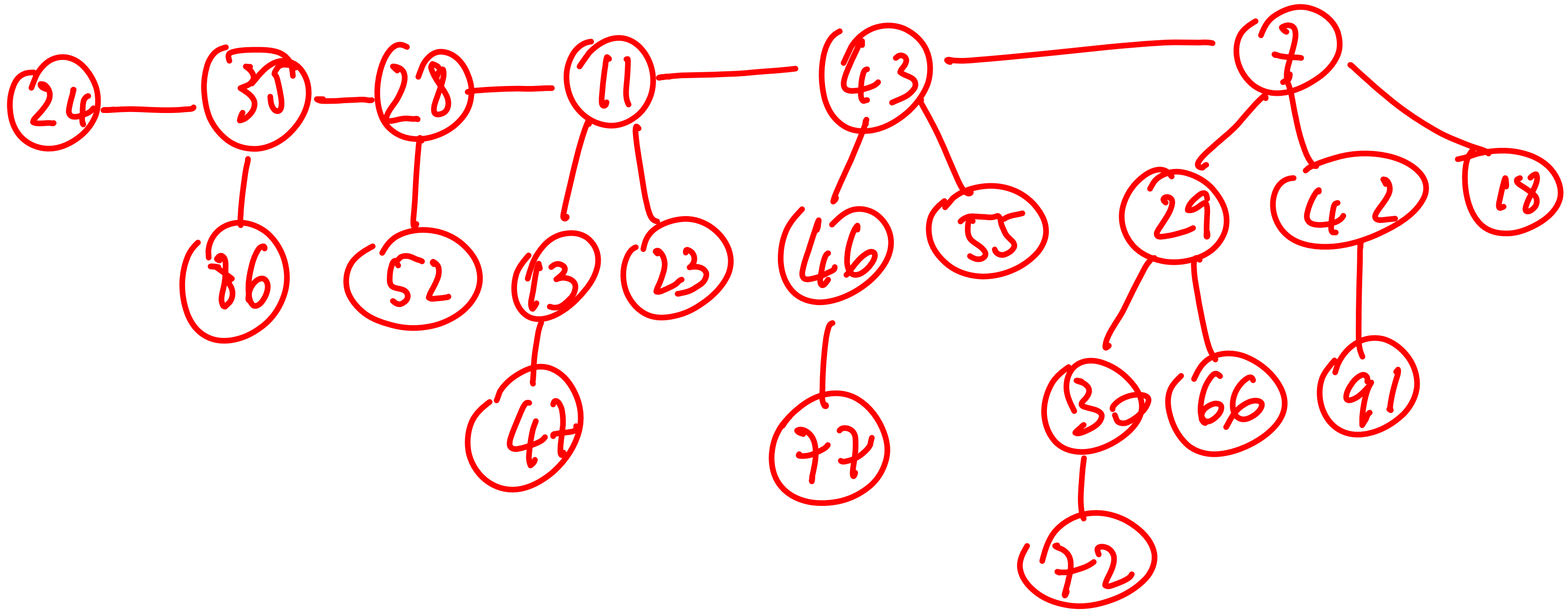
ESERCIZIO 3

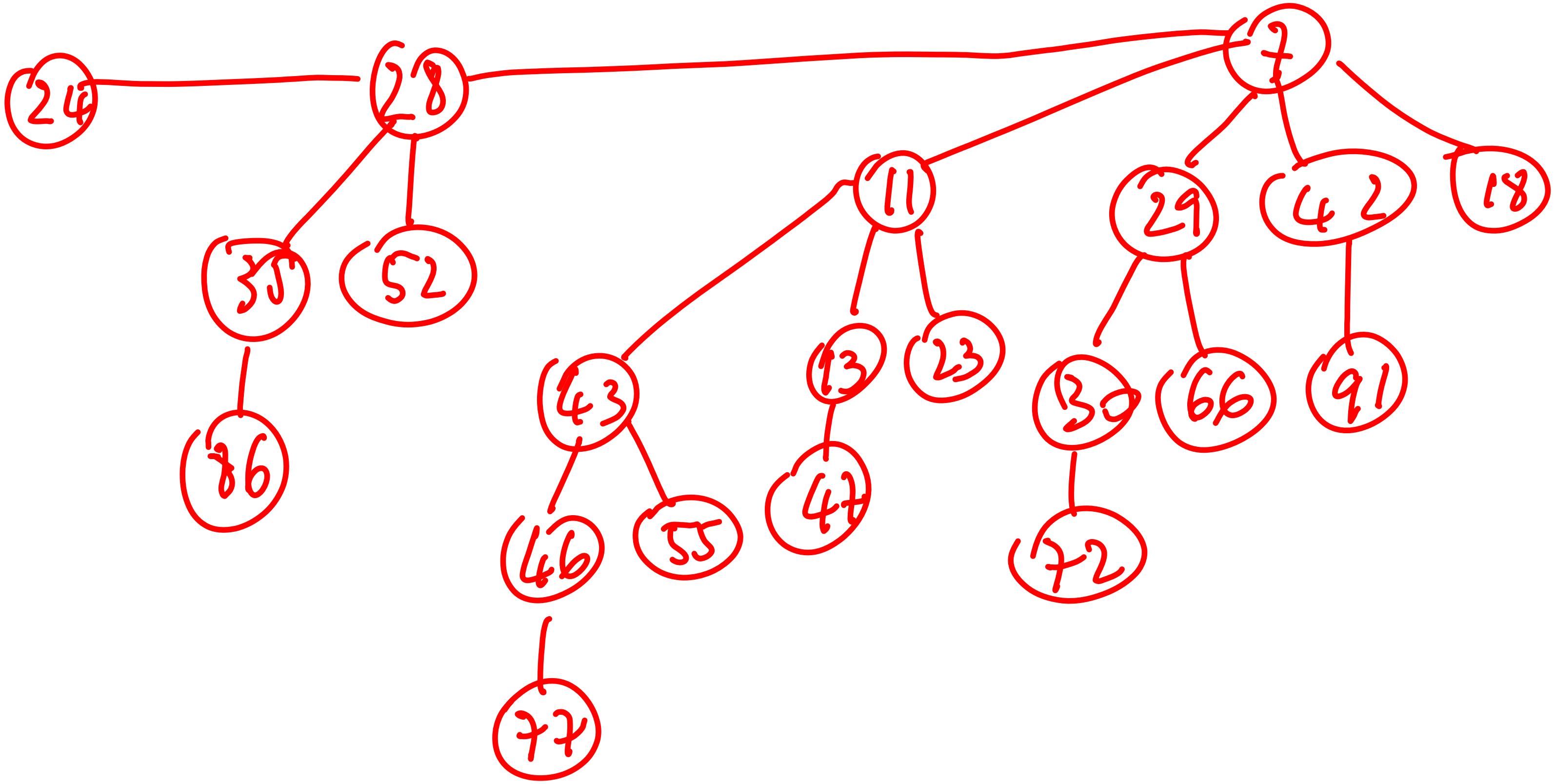
(a) Si **definiscano** gli *heap binomiali* e si **descrivano** le operazioni DECREASEKEY e DELETE. Quindi si **cancelli** il nodo evidenziato (contenente la chiave 26) dall'heap binomiale a lato.



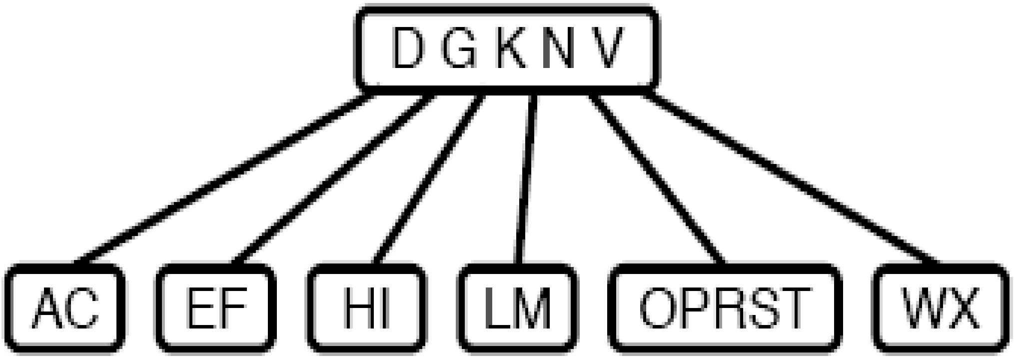
(b) Nel caso degli heap binomiali, è richiesto che gli alberi binomiali di cui essi sono formati siano *ordinati*. Perché?




24
35
28
11
43
7
86
52
13
23
46
55
29
42
18
47
77
30
66
91
72


24
28
7
11
29
42
18
35
52
43
13
23
30
66
91
86
46
55
47
72
77

(b) Nel caso degli heap binomiali, è richiesto che gli alberi binomiali di cui essi sono formati siano *ordinati*. Perché?



$t-1 \leq 2 \rightarrow t \leq 3$

$2t-1 \geq 5 \rightarrow t \geq 3$

$t = 3$

(c) Si fornisca un limite superiore (solo enunciato) e un limite inferiore (enunciato e dimostrazione) per l'altezza di un B-tree di grado minimo t con n chiavi. Quindi si utilizzino tali limiti per determinare i **possibili valori** per l'altezza di un B-tree $\mathcal{T}'$ con 9.999 chiavi, il cui grado minimo è il medesimo di quello in figura.

$$\log_{2t} \frac{n+1}{2t} \leq h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

$t = 3$

$$\left\lceil \log_6 \frac{10000}{6} \right\rceil \leq h \leq \left\lfloor \log_3 \frac{10000}{2} \right\rfloor$$

$$\boxed{5 \leq h \leq 8}$$

6
36
216
1296

$10000 \div 6 = 1666$, resto 40