ESERCIZIO 4

(a) Si definiscano i concetti di: rete di flusso, flusso (in una rete di flusso) e suo valore, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema del *massimo flusso/minimo taglio*.

(c) Si proponga un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità, per determinare un taglio minimo in una rete di flusso di cui sia noto un flusso massimo.

Input:
- rete di flusso
- flusso massimo

Output: taglio minimo

Algoritmo e complessità

ESERCIZIO 1

Sia $G = (V, E, s, t, c)$ una rete di flusso (con sorgente s, pozzo t e capacità c) e siano $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v), \quad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V.$$

(a) Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

(b) Si risponda ai medesimi quesiti per la funzione $\lambda f_1 + \mu f_2$ definita da

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u, v) =_{Def} \lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v), \quad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V,$$

dove $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ e $\lambda + \mu = 1$.

antisimmetria: $(f_1 + f_2)(u,v) = f_1(u,v) + f_2(u,v) = -f_1(v,u) - f_2(v,u)$

$= -(f_1(v,u) + f_2(v,u)) = -(f_1 + f_2)(v,u)$

legge di conservazione $\quad u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\sum_{v \in V} (f_1 + f_2)(u,v) = \sum_{v \in V} (f_1(u,v) + f_2(u,v)) = \sum_{v \in V} f_1(u,v) + \sum_{v \in V} f_2(u,v)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

vincolo di capacità: $(f_1+f_2)(u,v) \le c(u,v)$?

$$s \xrightarrow{1} t$$

$f_1(s,t) = 1$ $\qquad$ $f_2(s,t) = 1$

$(f_1+f_2)(s,t) = 2 > c(s,t)$ $\quad$ NO!

(b)

antisimmetria: $(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v) = -\lambda f_1(v,u) - \mu f_2(v,u)$

$$= -(\lambda f_1(v,u) + \mu f_2(v,u)) = -(\lambda f_1 + \mu f_2)(v,u)$$

legge di conservazione $\quad u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\sum_{v\in V} (\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = \sum_{v \in V} (\lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v)) = \lambda \sum_{v\in V} f_1(u,v) + \mu \sum_{v \in V} f_2(u,v)$$

$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

vincolo di capacità

$$
\begin{aligned}
(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v) \\
&\le \lambda c(u,v) + \mu c(u,v) \\
&= (\lambda + \mu) c(u,v) \\
&= c(u,v)
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2

Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata sulle coppie ordinate dei vertici di una rete di flusso $G = (V, E)$ con funzione capacità $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, sorgente s e pozzo t.

Si proponga un algoritmo efficiente per stabilire se

(a) f è un flusso in (G, c, s, t);

(b) f è un flusso *massimo* in (G, c, s, t)

e se ne valuti la complessità computazionale.

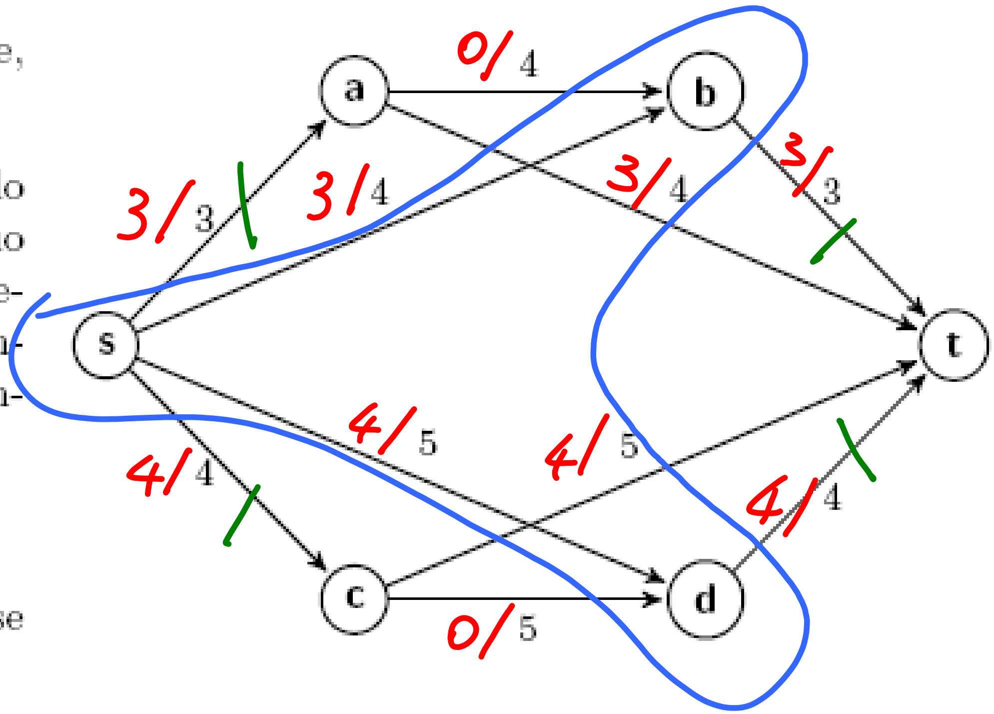
ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Quindi si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (s, a, b, t) precede i cammini (s, b, t) e (s, c, d, t), il cammino (s, c, t) precede il cammino (s, d, t), ma non il cammino (s, c, d, t), ecc.).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima e se ne calcoli la capacità.



(s, a, b, t)

(s, b, a, t)

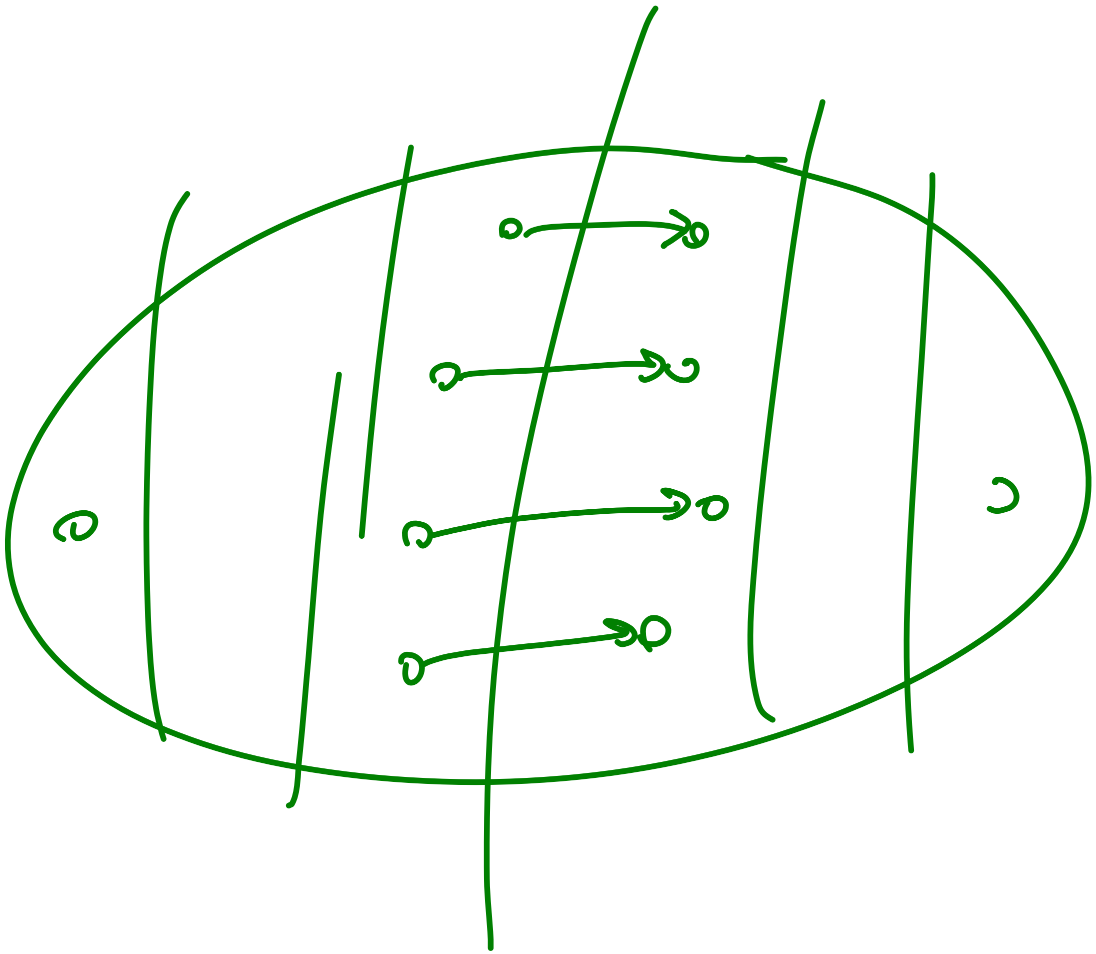
(s, c, d, t)

(s, d, c, t)

$$|f^*| = 3 + 3 + 4 + 4 = 14$$

$$c(\{s, b, d\}, \{a, c, t\}) = 3 + 4 + 3 + 4 = 14$$

$f(S,T) \leq c(S,T)$



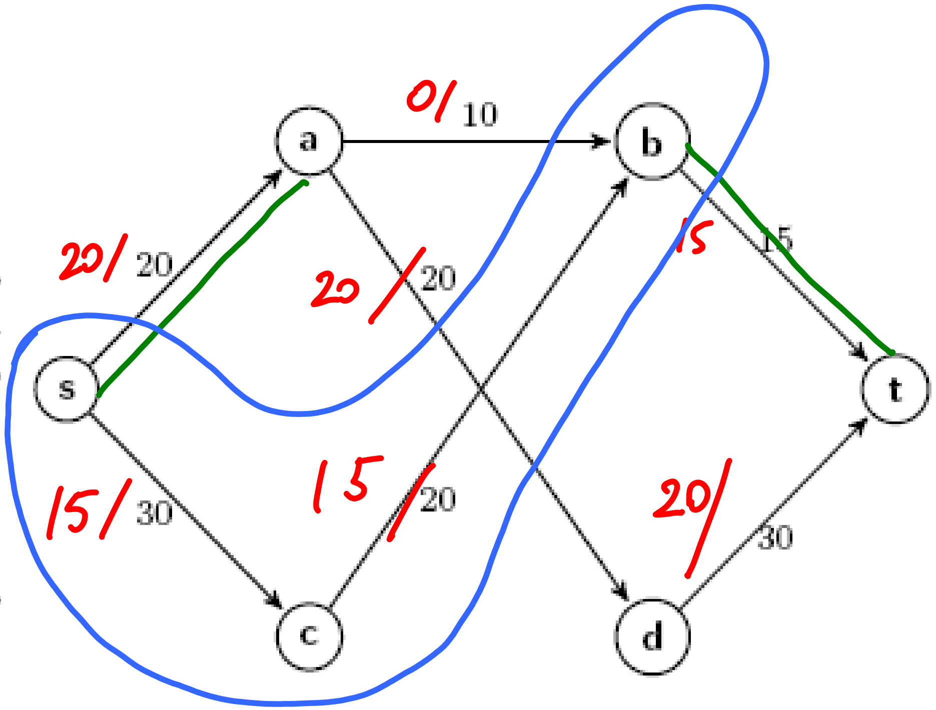
ESERCIZIO 5 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ che a sua volta precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.

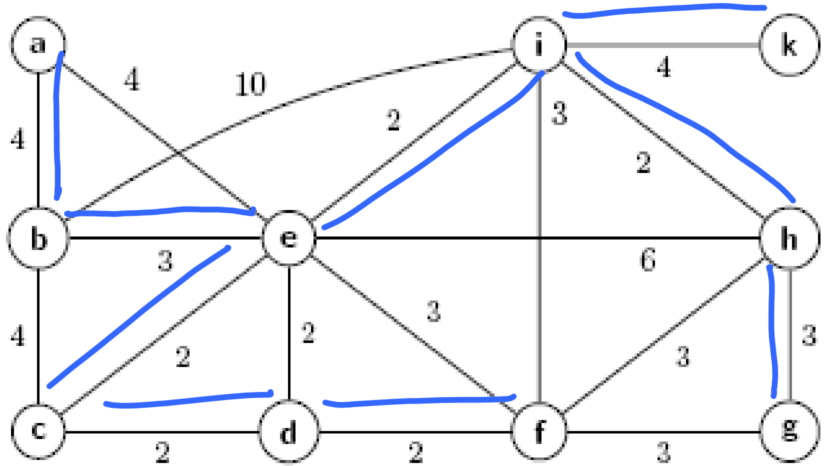


$|f^*| = 35$

$c(\{s, c, b\}, \{a, d, t\}) = 35$

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato a partire dal nodo e.



(b) Si descrivano i "passi blu" e "passi rossi" negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*.
Quindi si dimostri che se dopo un certo numero di passi di colorazione il sottografo degli archi blu non forma ancora uno spanning tree, allora è possibile eseguire un passo blu.

$4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 3 + 2 + 2 + 4$

$10 + 14 = 24$

Dijkstra con pesi negativi