"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2014/15

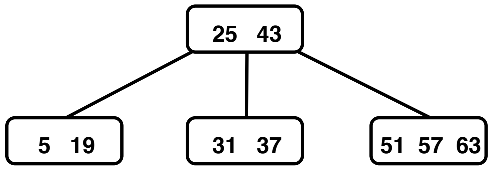
Seconda sessione di esami (I appello) - 22 giugno 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (B-trees)

(a) Si definisca la struttura dati dei B-tree.

(b) Sia T l'insieme dei valori $t \in \mathbb{N}$ per i quali l'albero $\mathcal{T}$ in figura possa essere considerato un B-tree di grado minimo t e si ponga



$$m = \min T\,, \qquad M = \max T\,.$$

(b.1) Quanto valgono m ed M? (Motivare la risposta.)

(b.2) Si illustri l'inserimento delle chiavi 54, 52 e 53 in $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo m.

(b.3) Si illustri la cancellazione delle chiavi 37, 43 e 57 da $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo M.

ESERCIZIO 2 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso a valori reali $w : E \to \mathbb{R}$, ma senza cicli di peso negativo. Siano inoltre a, b, c tre nodi distinti di G.
Si progetti un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale, per determinare (qualora esista) un ciclo di peso minimo (non necessariamente semplice) passante per i tre nodi a, b, c, in un ordine qualsiasi.

ESERCIZIO 3 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 10 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 4} \\ 5 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso, flusso netto, valore di un flusso, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il Teorema del "Massimo Flusso/Minimo Taglio" e lo si applichi per verificare se un flusso dato sia massimo per un'assegnata rete di flusso.

ESERCIZIO 5 (Heap di Fibonacci)

(a) Si definiscano gli alberi binomiali non ordinati, enunciando e dimostrando le loro più importanti proprietà.

(b) Si indichino le operazioni supportate dagli heap di Fibonacci e con quale complessità.

(c) Sia x un nodo di grado k in un heap di Fibonacci e siano $y_1, \ldots, y_k$ i figli di x nell'ordine in cui sono stati innestati in x. Quale limitazione inferiore è possibile dare per degree(y_i)? Perchè?

"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2014/15

Seconda sessione di esami (II appello) - 6 luglio 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Minimum spanning trees)

Si illustri l'algoritmo di Kruskal e se ne dimostri la correttezza.

ESERCIZIO 2 (Cammini minimi)

Si descriva l'algoritmo di Floyd-Warshall e il suo ambito di applicabilità. Quindi, dopo aver definito la nozione di chiusura transitiva di un grafo orientato, si descriva anche un algoritmo per calcolare la chiusura transitiva di un grafo orientato.

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di *rete di flusso* e di *flusso*.

(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G. Si consideri la funzione $(f_1 + f_2)$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere per la funzione $(f_1 + f_2)$ e quali no, motivando la risposta.

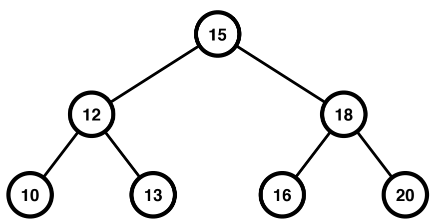
ESERCIZIO 4 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 16 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 4 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (Splay trees)

(a) Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.
Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni sullo splay tree a lato:
- SEARCH 10, 16
- INSERT 17
- DELETE 20



(b) Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig*, nonché l'operazione di assemblaggio finale, in un splay tree di tipo top-down.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2014/15

Terza sessione di esami (II appello) - 06 ottobre 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 15 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 4} \\ 5 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

Si descrivano i passi “blu” e quelli “rossi” negli algoritmi per il calcolo del minimum spanning tree. Quindi si enunci e si dimostri il cosiddetto “invariante del colore”.

ESERCIZIO 3 (Cammini minimi)

(a) Si illustri un algoritmo, valutandone anche la complessità computazionale, per determinare in maniera efficiente se un dato grafo pesato (G, w), ove $G = (V, E)$ e $w\colon E \to \mathbb{R}$, contiene un ciclo di peso negativo.

(b) Si risolva lo stesso esercizio, ma per verificare l'eventuale presenza di cicli di peso positivo.

ESERCIZIO 4 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di *rete di flusso* e di *flusso*.

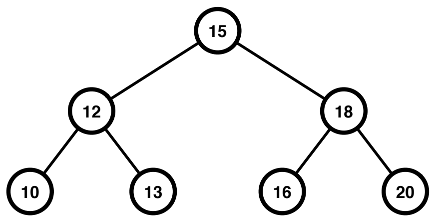
(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G. Si consideri la funzione $(f_1 + f_2)$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) := f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere per la funzione $(f_1 + f_2)$ e quali no, motivando la risposta.

ESERCIZIO 5 (Splay trees)

(a) Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.
Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni sullo splay tree a lato:
- Search 20, 13
- Insert 17
- Delete 15



(b) Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig*, nonché l'operazione di assemblaggio finale, in uno splay tree di tipo top-down.

"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (I appello) – 08 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Analisi ammortizzata)

Avendo a disposizione due stack, si illustri come simulare in maniera efficiente le operazioni di Enqueue e Dequeue su una coda e si analizzi la simulazione fornita mediante analisi ammortizzata (con almeno il metodo del potenziale).

ESERCIZIO 2 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.

(b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di un un nodo in uno heap binomiale contenente n nodi.

ESERCIZIO 3 (Cammini minimi)

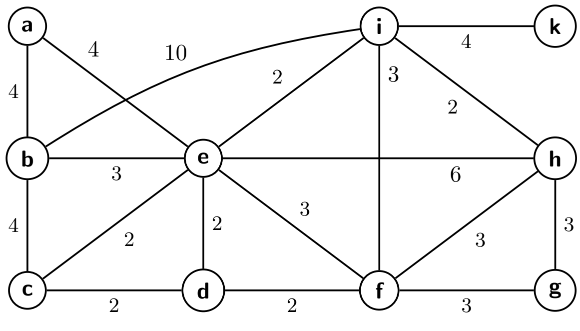
Si illustri un algoritmo efficiente (anche mediante pseudo-codice) per determinare i cammini minimi da una sorgente assegnata a tutti i nodi da essa raggiungibili in un grafo orientato aciclico con funzione peso a valori reali.

ESERCIZIO 4 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim (anche mediante il suo pseudo-codice) e lo si applichi al grafo a lato, iniziando dal nodo **a**.

(b) Per ciascuno dei seguenti archi si stabilisca se possa fare parte di un *minimum spanning tree* del grafo a lato:
($\mathbf{c}, \mathbf{d}$), ($\mathbf{f}, \mathbf{h}$), ($\mathbf{f}, \mathbf{g}$), ($\mathbf{e}, \mathbf{f}$).

(c) Si descrivano i cosiddetti "passi blu" e "passi rossi" neglialgoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree*. Quindi si enunci l'*invariante del colore* e lo si dimostri limitatamente ai passi blu.



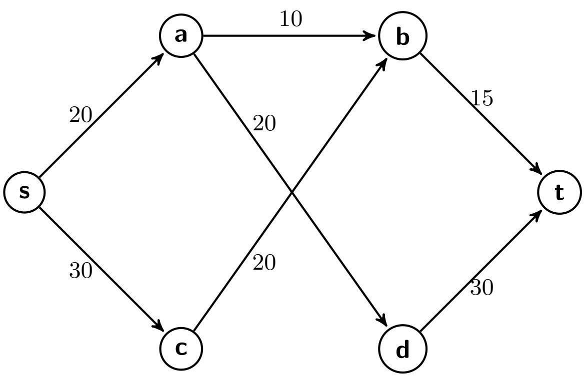
ESERCIZIO 5 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino ($\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$) precede il cammino ($\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{t}$) che a sua volta precede il cammino ($\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (II appello) – 29 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

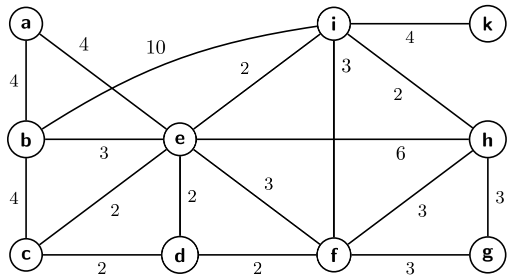
(a) Si definisca il *grafo* $G'_s = (V, E'_s)$ *dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo G'_s se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

(c) Si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo G'_s dei cammini minimi.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l’algoritmo di Kruskal, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato, utilizzando tra archi del medesimo peso l’ordinamento lessicografico (per cui, ad es., (a, b) precede (a, e) che, a sua volta, precede (i, k)), ove gli archi stessi sono rappresentati lessicograficamente (per cui, ad es., la rappresentazione di riferimento dell’arco tra i nodi e ed a è (a, e)).



(b) Si descrivano i “passi blu” e “passi rossi” negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l’*invariante del colore*. Quindi si dimostri che se dopo un certo numero di passi di colorazione il sottografo degli archi blu non forma ancora uno spanning tree, allora è possibile eseguire un passo blu.

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso netto e suo valore, cammino aumentante, rete residua, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il Teorema del Massimo Flusso/Minimo Taglio.

ESERCIZIO 4 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell’aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell’i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 5 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 6 \\ 6 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (Heap di Fibonacci)

(a) Si definiscano gli alberi binomiali non ordinati, enunciando e dimostrando le loro più importanti proprietà.

(b) Si indichino le operazioni supportate dagli heap di Fibonacci e con quale complessità.

(c) Sia x un nodo di grado k in un heap di Fibonacci e siano $y_1, \ldots, y_k$ i figli di x nell’ordine in cui sono stati innestati in x. Quale limitazione inferiore è possibile dare per $\text{degree}(y_i)$? Perchè?

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (II appello) – 29 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

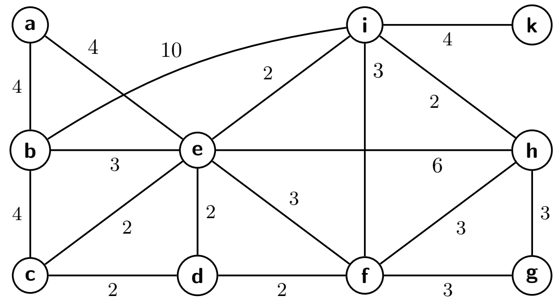
ESERCIZIO 1 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato a partire dal nodo e.

(b) Si descrivano i “passi blu” e “passi rossi” negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*.
Quindi si dimostri che se dopo un certo numero di passi di colorazione il sottografo degli archi blu non forma ancora uno spanning tree, allora è possibile eseguire un passo blu.



ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso netto e suo valore, cammino aumentante, rete residua, taglio e sua capacità.

(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi netti in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi netti sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

ESERCIZIO 4 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 4 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 5} \\ 10 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si dimostri che un albero binomiale di grado k ha altezza k e contiene esattamente 2^k nodi.

(b) Si definiscano gli *heap binomiali*. Quindi si fornisca un esempio di heap binomiale contenente esattamente 8 chiavi e si effettui su di esso l'operazione di estrazione del minimo.

"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Seconda sessione di esami (II appello) – 06 luglio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

(a) Si definisca il *grafo* $G'_s = (V, E'_s)$ *dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

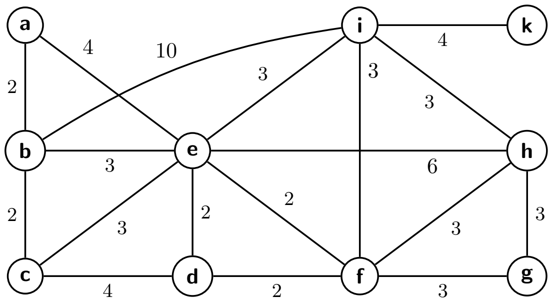
(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo G'_s se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

(c) Alla luce della proprietà (b), si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo G'_s dei cammini minimi.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Kruskal, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato.

(b) Si descrivano i "passi blu" e "passi rossi" negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*.
Quindi si dimostri l'invariante del coloro limitatamente agli archi blu.



ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

Si enunci e si dimostri il teorema del flusso massimo/taglio minimo, definendo preliminarmente le nozioni sulle reti di flusso rilevanti per enunciare e dimostrare tale teorema.

ESERCIZIO 4 (Analisi ammortizzata)

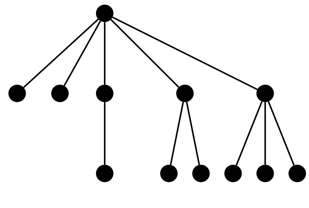
Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 8 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 3} \\ 3 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (Heap di Fibonacci)

(a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.

(b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Terza sessione di esami (II appello) – 05 ottobre 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

(a) Si illustri un algoritmo, valutandone anche la complessità computazionale, per determinare in maniera efficiente se un dato grafo pesato (G, w), ove $G = (V, E)$ e $w: E \to \mathbb{R}$, contiene un ciclo di peso negativo.

(b) Si risolva lo stesso esercizio, ma per verificare l'eventuale presenza di cicli di peso positivo.

ESERCIZIO 2 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

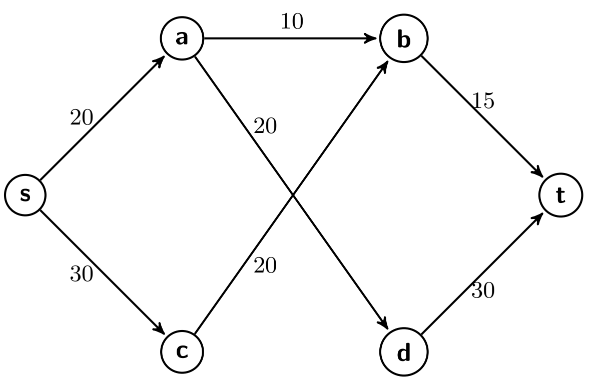
ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ che a sua volta precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



ESERCIZIO 4 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 4 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 3 \\ 5 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (Heap di Fibonacci)

(a) Si definiscano gli alberi binomiali non ordinati, enunciando e dimostrando le loro più importanti proprietà.

(b) Si indichino le operazioni supportate dagli heap di Fibonacci e con quale complessità.

(c) Sia x un nodo di grado k in un heap di Fibonacci e siano $y_1, \ldots, y_k$ i figli di x nell'ordine in cui sono stati innestati in x. Quale limitazione inferiore è possibile dare per degree(y_i)? Perchè?

"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2014/15

1^a prova in itinere – 18 dicembre 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'**aggregazione** e del **potenziale**, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 6i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 4 \\ 4 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Sia $\mathcal{T}$ un B-tree contenente esattamente le 11 chiavi $\{2i : 1 \leq i \leq 11\}$ e tale che la sua radice contenga le due chiavi 6 e 12.

Dopo aver determinato il grado minimo t del B-tree $\mathcal{T}$, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

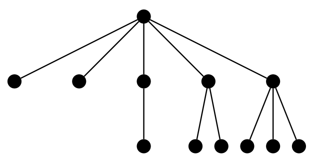
(1) Insert(24) (4) Delete(22)
(2) Delete(16) (5) Delete(2)
(3) Delete(24) (6) Delete(10)

(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.

ESERCIZIO 3

(a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisce una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.

(b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



ESERCIZIO 4

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up. Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le chiavi $\{2i : 5 \leq i \leq 11\}$:
- Search 14, 18, 16
- Insert 19
- Delete 20
- Search 10

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (I appello) – 08 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

I PARTE

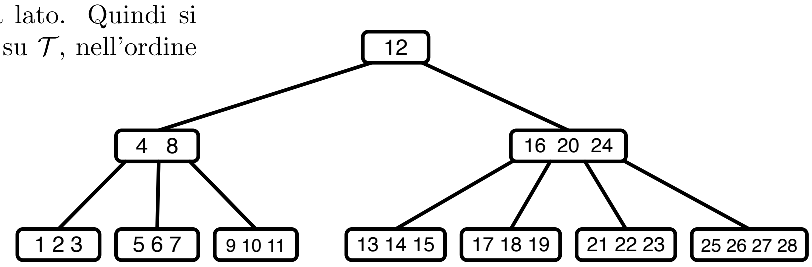
ESERCIZIO 1 (Analisi ammortizzata)

Avendo a disposizione due stack, si illustri come simulare in maniera efficiente le operazioni di ENQUEUE e DEQUEUE su una coda e si analizzi la simulazione fornita mediante analisi ammortizzata (con almeno il metodo del potenziale).

ESERCIZIO 2 (B-trees)

Si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato. Quindi si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$, nell'ordine dato:

(1) DELETE(1) (6) INSERT(1)
(2) DELETE(2) (7) INSERT(2)
(3) DELETE(3) (8) INSERT(3)
(4) DELETE(4) (9) INSERT(4)
(5) DELETE(5) (10) INSERT(5)



ESERCIZIO 3 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.

(b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di un un nodo in uno heap binomiale contenente n nodi.

"ALGORITMI E COMPLESSITÀ"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2014/15

Seconda sessione di esami (I appello) - 22 giugno 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

II PARTE

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso a valori reali $w : E \to \mathbb{R}$, ma senza cicli di peso negativo. Siano inoltre a, b, c tre nodi distinti di G.
Si progetti un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale, per determinare (qualora esista) un ciclo di peso minimo (non necessariamente semplice) passante per i tre nodi a, b, c, in un ordine qualsiasi.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

Si descrivano i passi "blu" e quelli "rossi" negli algoritmi per il calcolo del minimum spanning tree. Quindi si enunci e si dimostri il cosiddetto "invariante del colore" limitatamente ai passi "blu".

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso, flusso netto, valore di un flusso, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il Teorema del "Massimo Flusso/Minimo Taglio" e lo si applichi per verificare se un flusso dato sia massimo per un'assegnata rete di flusso.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2014/15

Seconda sessione di esami (II appello) - 6 luglio 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

II PARTE

ESERCIZIO 1 (Minimum spanning trees)

Si illustri l'algoritmo di Kruskal e se ne dimostri la correttezza.

ESERCIZIO 2 (Cammini minimi)

Si descriva l'algoritmo di Floyd-Warshall e il suo ambito di applicabilità. Quindi, dopo aver definito la nozione di chiusura transitiva di un grafo orientato, si descriva anche un algoritmo per calcolare la chiusura transitiva di un grafo orientato.

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di *rete di flusso* e di *flusso*.

(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G. Si consideri la funzione $(f_1 + f_2)$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere per la funzione $(f_1 + f_2)$ e quali no, motivando la risposta.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (I appello) – 08 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

II PARTE

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

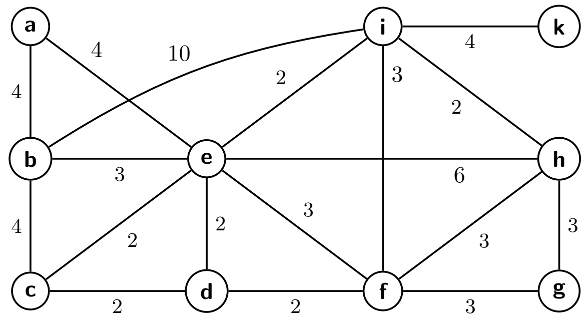
Si illustri un algoritmo efficiente (anche mediante pseudo-codice) per determinare i cammini minimi da una sorgente assegnata a tutti i nodi da essa raggiungibili in un grafo orientato aciclico con funzione peso a valori reali.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim (anche mediante il suo pseudo-codice) e lo si applichi al grafo a lato, iniziando dal nodo **a**.

(b) Per ciascuno dei seguenti archi si stabilisca se possa fare parte di un *minimum spanning tree* del grafo a lato: (**c**, **d**), (**f**, **h**), (**f**, **g**), (**e**, **f**).

(c) Si descrivano i cosiddetti “passi blu” e “passi rossi” neglialgoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree*. Quindi si enunci l'*invariante del colore* e lo si dimostri limitatamente ai passi blu.



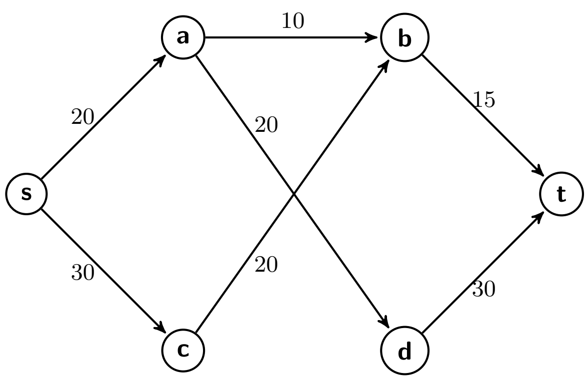
ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (**s**, **a**, **b**, **t**) precede il cammino (**s**, **a**, **d**, **t**) che a sua volta precede il cammino (**s**, **c**, **b**, **t**)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

ANNO ACCADEMICO 2015/16

Prima sessione di esami (II appello) – 29 febbraio 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

II PARTE

ESERCIZIO 1 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

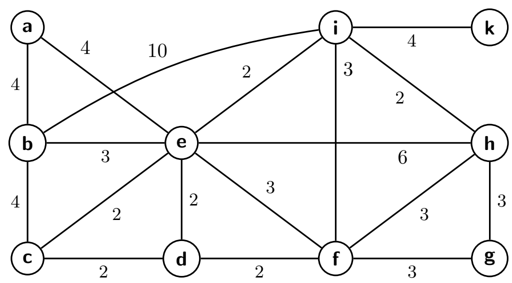
(a) Si definisca il *grafo* $G'_s = (V, E'_s)$ *dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo G'_s se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

(c) Si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo G'_s dei cammini minimi.

ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l’algoritmo di Kruskal, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato, utilizzando tra archi del medesimo peso l’ordinamento lessicografico (per cui, ad es., (a, b) precede (a, e) che, a sua volta, precede (i, k)), ove gli archi stessi sono rappresentati lessicograficamente (per cui, ad es., la rappresentazione di riferimento dell’arco tra i nodi e ed a è (a, e)).



(b) Si descrivano i “passi blu” e “passi rossi” negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l’*invariante del colore*.
Quindi si dimostri che se dopo un certo numero di passi di colorazione il sottografo degli archi blu non forma ancora uno spanning tree, allora è possibile eseguire un passo blu.

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso netto e suo valore, cammino aumentante, rete residua, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il Teorema del Massimo Flusso/Minimo Taglio.