Grafi e reti di flusso

Molti problemi di ottimizzazione sono caratterizzati da una struttura a grafo: in molti casi questa struttura emerge in modo naturale, in altri nasce dal particolare modo in cui i problemi vengono modellati. Ad esempio, una rete stradale è naturalmente rappresentabile come un grafo in cui i nodi sono gli incroci e gli archi le strade; pertanto non è strano che il settore dei trasporti sia uno di quelli in cui la teoria dei grafi trova maggiore applicazione.

Reti di flusso

Con il termine **rete** indichiamo un grafo pesato, cioè un grafo ai cui nodi e/o archi sono associati valori numerici detti **pesi**. In generale, in una rete gli archi sono interpretabili come canali attraverso cui fluiscono dei beni, che possono essere rappresentati per mezzo di grandezze discrete (ad esempio il numero di auto su una strada, o il numero di messaggi su una rete di comunicazione) o continue (quantità di petrolio che fluisce in un oleodotto), possono rappresentare dei valori assoluti oppure dei valori relativi (per unità di tempo). In questo contesto, i pesi degli archi rappresentano usualmente delle capacità e dei costi, mentre i pesi sui nodi possono rappresentare la quantità dei beni che entrano in quei nodi, o che ne escono.

Reti di flusso

Formalmente una rete di flusso è definita come un grafo orientato $G = (V, E)$ *senza cappi* e tale che

- Ad ogni arco $(u, v) \in E$ è associato un valore non negativo, $c(u, v) \geq 0$, detto **capacità** dell'arco. Se l'arco (u, v) non è presente in E allora assumiamo che esso abbia capacità nulla, cioè $c(u, v) = 0$.

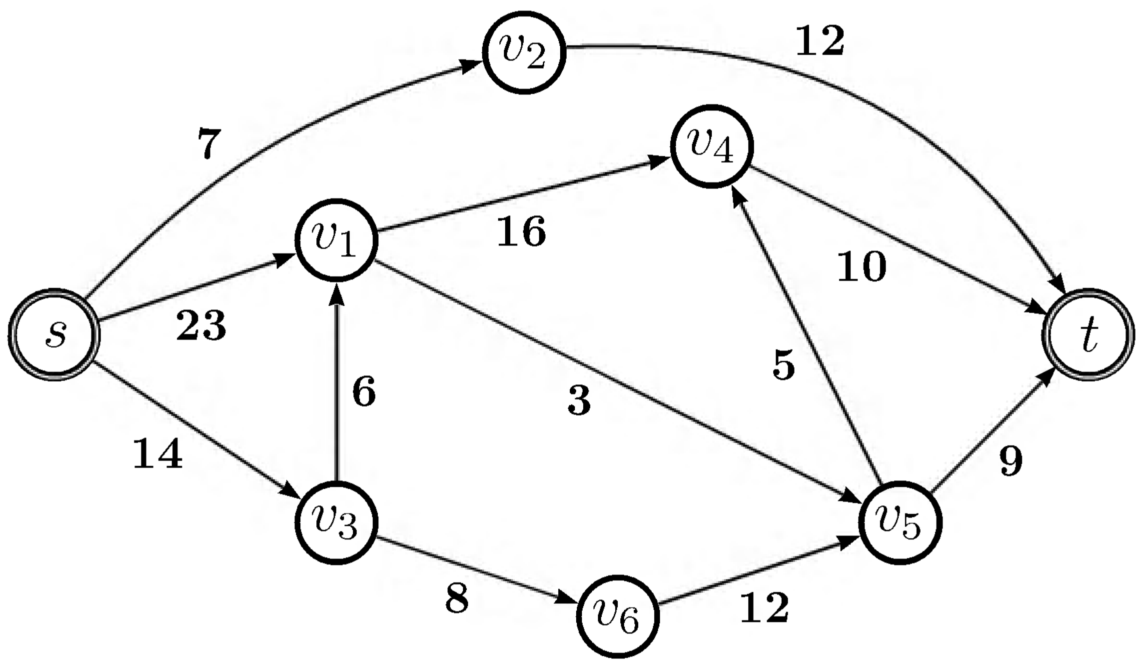
- Nella rete di flusso ci sono due vertici speciali: il vertice **sorgente**, indicato con il simbolo s, ed il vertice **pozzo** (o **destinazione**), indicato con il simbolo t.

  I rimanenti vertici sono detti **vertici di transizione**.

- Ogni vertice giace su qualche cammino dalla sorgente al pozzo. Il grafo è quindi connesso e pertanto vale $|E| \geq |V| - 1$.

Reti di flusso

La figura mostra un esempio di rete di flusso. Il vertice sorgente ed il pozzo sono rappresentati, rispettivamente, dai simboli s e t. Ad ogni arco $(u, v) \in E$ è associato il valore $c(u, v)$.



Flusso "reale" in una rete

Data una rete $G = (V, E)$ con capacità $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$, un **flusso reale** in G è una funzione $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ che soddisfa le seguenti proprietà

- **Vincolo di capacità**

  per ogni $(u, v) \in V \times V$, si richiede che $\varphi(u, v) \leq c(u, v)$

- **Conservazione del flusso (legge di Kirchhoff)**

  per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$, si richiede che

  $$\sum_{v \in V} \varphi(u, v) = \sum_{v \in V} \varphi(v, u)$$

  (In altre parole, il flusso uscente da u deve essere uguale a quello entrante in u, per ogni $u \in V - \{s, t\}$.)

La quantità $\varphi(u, v)$ è detta **flusso reale** lungo l'arco (u, v).

Valore del flusso “reale”

Il valore $|\varphi|$ di un flusso reale $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ è dato da

$$|\varphi| = \sum_{v \in V} \varphi(s, v) - \sum_{v \in V} \varphi(v, s) \,.$$

Flusso “netto” in una rete

Data una rete $G = (V, E)$ con capacità $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ e con un **flusso reale** $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, poniamo

$$f_\varphi(u, v) = \varphi(u, v) - \varphi(v, u)\,,$$

per ogni $(u, v) \in V \times V$.

La quantità $f_\varphi(u, v)$ è detta **flusso netto** dal vertice u al vertice v **indotto** dal flusso reale φ.

Proprietà del flusso netto

Sia $G = (V, E)$ una rete di flusso con capacità $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ e con flusso netto (spesso detto semplicemente flusso) $f_\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ indotto da un dato flusso reale $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- **Vincolo di capacità**

  $f_\varphi(u, v) \leq c(u, v)$, per tutti gli $u, v \in V$.

- **Antisimmetria**

  $f_\varphi(u, v) = -f_\varphi(v, u)$, per tutti gli $u, v \in V$.

- **Conservazione del flusso**

  $\sum_{v \in V} f_\varphi(u, v) = 0$, per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$

  (cioè, il flusso netto uscente da u è nullo, per ogni $u \in V - \{s, t\}$).

Il vincolo di capacità

Per tutti gli $u, v \in V$, *si richiede che* $f_\varphi(u, v) \leq c(u, v)$

Il vincolo di capacità asserisce semplicemente che il flusso netto da un vertice ad un altro non può eccedere la corrispondente capacità.

La proprietà antisimmetrica

Per tutti gli $u, v \in V$*, si richiede che* $f_\varphi(u, v) = -f_\varphi(v, u)$

L'antisimmetria asserisce che il flusso netto da un vertice u ad un vertice v è l'opposto del flusso netto nella direzione inversa. Quindi il flusso netto da un vertice a se stesso deve essere 0, perchè per ogni $u \in V$ abbiamo $f_\varphi(u, u) = -f_\varphi(u, u)$, il che implica $f_\varphi(u, u) = 0$.

La proprietà di conservazione del flusso

Per tutti gli $u \in V - \{s,t\}$, *si richiede che* $\displaystyle\sum_{v \in V} f_\varphi(u,v) = 0$

La proprietà di conservazione del flusso asserisce che il flusso totale uscente da un vertice di transizione deve essere *nullo*. Per la proprietà di antisimmetria possiamo riscrivere la proprietà di conservazione nella forma

$$\sum_{v \in V} f_\varphi(v,u) = 0$$

(cioè il flusso totale entrante in un vertice di transizione deve essere nullo).

Proprietà

Sia $G = (V, E, c, s, t)$ *una rete di flusso con funzione capacità* c*, sorgente* s *e pozzo* t *e sia* $f : V \times V \to \mathbb{R}$ *una funzione che soddisfi*

- *il vincolo di capacità (relativamente a* c*)*
- *la proprietà di antisimmetria*
- *la legge di conservazione del flusso (relativamente a* s *e a* t*).*

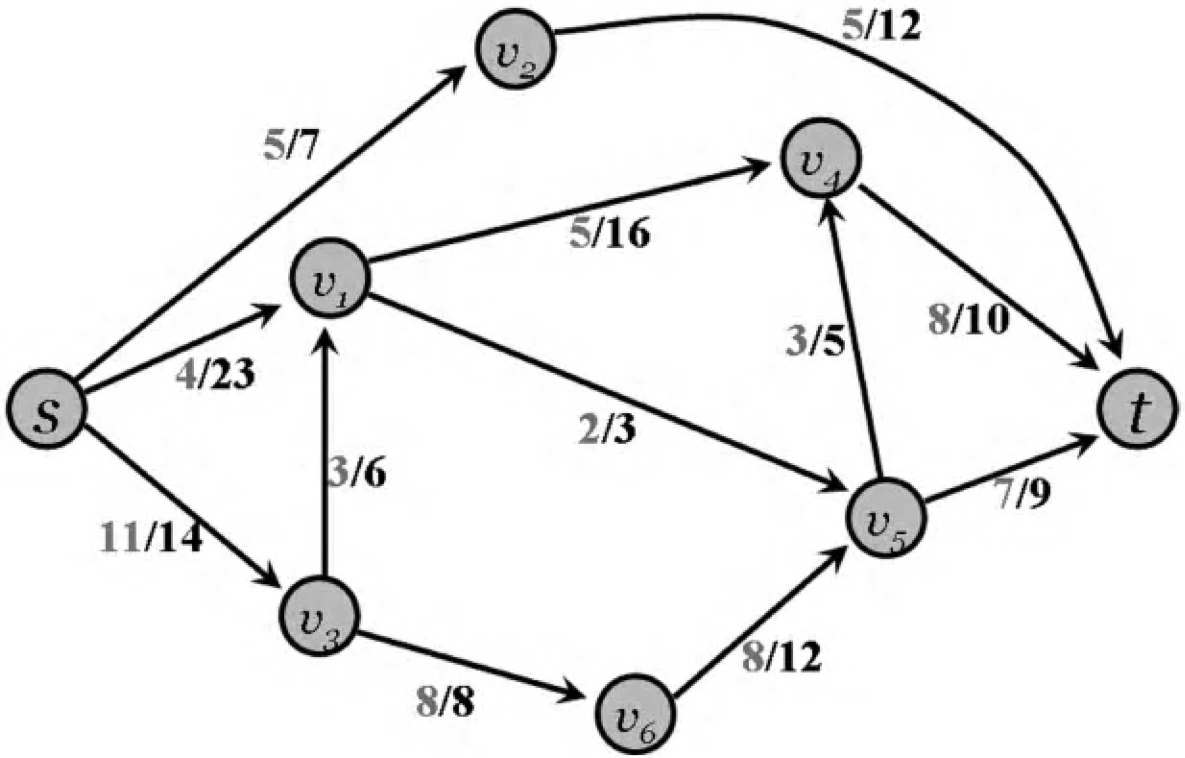
Allora la funzione $\varphi_f : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ *definita da*

$$\varphi_f(u, v) = \begin{cases} f(u, v) & \text{se } f(u, v) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è un flusso reale in $G = (V, E, c, s, t)$ *ed* f *è il flusso netto indotto da* φ_f*, cioè* $f = f_{\varphi_f}$.

Flusso in una rete: esempio

La figura mostra un esempio di flusso reale in una rete. Ad ogni arco $(u, v) \in E$ sono associati due valori, x/y, con $x = \varphi(u, v)$ e $y = c(u, v)$. Si noti come entrambi i vincoli dei flussi reali siano rispettati.



Valore del flusso

Il **valore** $|f|$ di un flusso f è definito come il flusso netto uscente dalla sorgente, cioè

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)\,.$$

Proprietà

Se f_φ è un flusso netto indotto da un flusso reale φ, allora

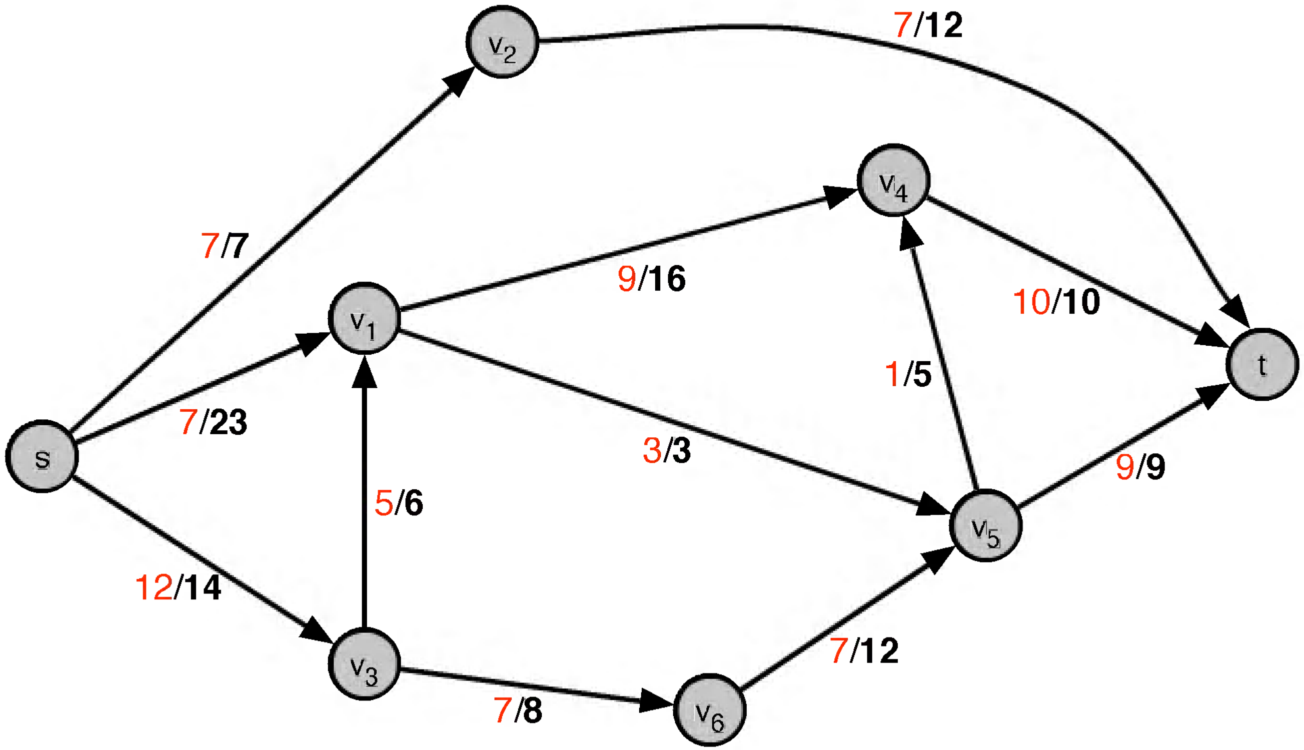
$$\begin{aligned}
|f_\varphi| &= \sum_{v \in V} f_\varphi(s,v) \\
&= \sum_{v \in V} (\varphi(s,v) - \varphi(v,s)) \\
&= \sum_{v \in V} \varphi(s,v) - \sum_{v \in V} \varphi(v,s) \\
&= |\varphi|\,.
\end{aligned}$$

Problema del flusso massimo

Il **problema del flusso massimo** in una rete di flusso (G, c, s, t) è di determinare un flusso netto f in G di valore massimo (da s a t).

Flusso massimo: esempio

La figura mostra un esempio di flusso massimo in una rete. Il valore di tale flusso è dato da $|f| = f(s, v_1) + f(s, v_2) + f(s, v_3) = 7 + 7 + 12 = 26.$



Reti con sorgenti e pozzi multipli

Il problema di flusso massimo su una rete G con più sorgenti $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ e più pozzi $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ può essere ricondotto ad un problema di flusso massimo ordinario.

Questo viene fatto trasformando la rete G in una rete di flusso ordinaria G' con singola sorgente e singolo pozzo nel modo seguente

- si aggiunge una **super-sorgente** s ed un arco orientato (s, s_i), per ogni $i = 1, ..., m$, con capacità $c(s, s_i) = \infty$
- si aggiunge un **super-pozzo** t ed un arco orientato (t_j, t), per ogni $j = 1, ..., n$, con capacità $c(t_j, t) = \infty$

È facile verificare che ogni flusso nella rete G' corrisponde ad un flusso nella rete G.

La notazione di sommatoria implicita

Se X e Y sono due insiemi di vertici allora poniamo

$$f(X,Y) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y)\,.$$

In accordo con questa notazione il vincolo di conservazione del flusso può essere espresso come la condizione che $f(u,V) = 0$ per tutti gli $u \in V - \{s,t\}$.

Inoltre, per definizione, si ha

$$|f| = \sum_{v\in V} f(s,v) = f(s,V)\,.$$

Lemma 1

Sia $G = (V, E)$ *una rete di flusso, e sia* f *un flusso in* G. *Allora:*

- *per* $X, Y \subseteq V$ *si ha* $f(X, Y) = -f(Y, X)$;
- *per* $X \subseteq V$ *si hanno* $f(X, X) = 0$ *e* $f(\emptyset, X) = 0$;
- *per* $X, Y, Z \subseteq V$, *si hanno*
  $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) - f(X \cap Y, Z)$ *e*
  $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y) - f(Z, X \cap Y)$.

Quindi, nel caso in cui $X \cap Y = \emptyset$, *si hanno*
$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ *e*
$f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$.

Corollario 1

Il valore di un flusso è uguale al flusso netto totale entrante nel pozzo, cioè

$$|f| = f(V, t)\,.$$

Dimostrazione

$|f|$	=	$f(s, V)$	(per definizione)
	=	$f(V, V) - f(V - s, V)$	(per il Lemma 1)
	=	$f(V, V - s)$	(per il Lemma 1)
	=	$f(V, t) + f(V, V - s - t)$	(per il Lemma 1)
	=	$f(V, t)$	(per la conservazione del flusso)

Il metodo di Ford-Fulkerson

Il metodo di Ford-Fulkerson è iterativo. Si parte con $f(u, v) = 0$ per tutti gli $u, v \in V$, ottenendo un flusso iniziale di valore nullo. Ad ogni iterazione il flusso viene incrementato lungo un **cammino aumentante**, ovvero un cammino dalla sorgente al pozzo lungo il quale sia possibile immettere ulteriore flusso.

Tale processo viene ripetuto finchè non si può più trovare alcun cammino aumentante. Al termine, si ottiene un flusso massimo.

Ford-Fulkerson(G, s, t)

1 si inizializzi il flusso f a 0

2 **while** esiste un cammino aumentante p

3   **do** si incrementi il flusso f lungo p

4 **return** f

Capacità residua

Sia f un flusso in una rete (G, c), e si consideri una coppia di vertici $u, v \in V$. La quantità di flusso netto addizionale che possiamo inviare da u a v prima di superare la capacità $c(u, v)$ è la **capacità residua** di (u, v), ed è data da

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)\,.$$

Quando il flusso netto $f(u, v)$ è negativo, la capacità residua $c_f(u, v)$ è maggiore della capacità $c(u, v)$.

Rete residua

Data una rete di flusso (G, c) ed un flusso f, **la rete residua** di G indotta da f è $G_f = (V, E_f)$, dove

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$$

Ogni arco della rete, chiamato **arco residuo**, può ammettere un flusso netto strettamente positivo.

Un arco (u, v) può essere un arco residuo in E_f, anche se esso non fosse un arco in E, ma purché $(v, u) \in E$. Ciò implica che $\boxed{E_f \subseteq E \cup E^T}$ e quindi

$$|E_f| \leq 2 \cdot |E| \,.$$

Si osservi che la rete residua G_f è essa stessa una rete di flusso avente capacità definita dalla funzione c_f.

Cammini aumentanti

Data una rete di flusso (G, c) con flusso f, un **cammino aumentante** p è un cammino *semplice* dalla sorgente al pozzo nella rete residua G_f. Per definizione di rete residua, ogni arco (u, v) su un cammino aumentante ammette un flusso netto positivo addizionale da u a v senza violare il vincolo di capacità sull'arco.

La massima quantità di flusso netto che possiamo inviare lungo gli archi di un cammino aumentante si chiama **capacità residua** di p ed è data da

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ è un arco di } p\}\,.$$

Si osservi che vale sempre

$$c_f(p) > 0\,.$$

Lemma ~~3~~ 2

Sia (G, c) una rete di flusso, sia f un flusso di G, e sia p un cammino aumentante in G_f. Si definisca una funzione $f_p : V \times V \to R$ ponendo:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \text{ è su } p \\ -c_f(p) & \text{se } (v, u) \text{ è su } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora f_p è un flusso in G_f con valore $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Lemma ~~2~~ 3

Sia (G, c) una rete di flusso, e sia f un flusso in G. Sia G_f la rete residua di G indotta da f e sia f' un flusso in G_f. Allora la somma di flussi $f + f'$ è un flusso in G con valore $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Dimostrazione.

Dobbiamo verificare che siano soddisfatte la proprietà antisimmetrica, i vincoli di capacità e la conservazione del flusso.

Proprietà antisimmetrica.

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &= -f(v,u)-f'(v,u)\\ &= -(f(v,u)+f'(v,u))\\ &= -(f+f')(v,u)\end{aligned}$$

Vincolo di capacità

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &\leq f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))\\ &= c(u,v)\end{aligned}$$

Conservazione del flusso

Sia $u \in V \setminus \{s,t\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{v\in V}(f+f')(u,v) &= \sum_{v\in V}(f(u,v)+f'(u,v)) \\ &= \sum_{v\in V} f(u,v) + \sum_{v\in V} f'(u,v) \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f+f'| &= \sum_{v\in V}(f+f')(s,v) \\ &= \sum_{v\in V}(f(s,v)+f'(s,v)) \\ &= \sum_{v\in V} f(s,v) + \sum_{v\in V} f'(s,v) \\ &= |f|+|f'| \end{aligned}$$

Corollario

Sia (G, c) una rete di flusso, sia f un flusso di G, e sia p un cammino aumentante in G_f. Sia f_p il flusso in G_f definito come nel Lemma 3 e sia $f' : V \times V \to R$ la funzione

$$f' = f + f_p.$$

Allora f' è un flusso in G con valore $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.

Procedura di Ford-Fulkerson

```
Ford-Fulkerson(G, c, s, t)
    – sia G = (V, E)
    for (u, v) ∈ E do
        f(u, v) = 0
        f(v, u) = 0
    while esiste un cammino p da s a t nella rete residua G_f do
        c_f(p) = min{c_f(u, v) : (u, v) è in p}
        for (u, v) in p do
            f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)
            f(v, u) = −f(u, v)
```

Tagli in reti di flusso

Un **taglio** (S,T) in una rete di flusso (G,c) con sorgente s e pozzo t è una partizione di V in S e $T = V - S$ tale che $s \in S$ e $t \in T$.

Se f è un flusso, allora il **flusso netto attraverso il taglio** (S,T) è definito come

$$f(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v)\,.$$

La **capacità del taglio** è

$$c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v)\,.$$

Lemma 4

Sia f un flusso su una rete (G, c) con sorgente s e pozzo t, e sia (S, T) un taglio di G. Allora il flusso netto attraverso (S, T) è $f(S, T) = |f|$.

Dimostrazione.

Usando il Lemma 1 otteniamo

$$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \,. \end{aligned}$$

Corollario

Il valore di un qualunque flusso f in una rete di flusso (G, c) è limitato superiormente dalla capacità di un qualunque taglio di G.

Dimostrazione.

Sia (S, T) un taglio di G e sia f un flusso su G. Per il Lemma 4 ed i vincoli di capacità si ottiene

$$\begin{aligned} |f| &= f(S,T) \\ &= \textstyle\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \\ &\leq \textstyle\sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

Dal corollario segue che

$$\sup_{f \text{ flusso in } G} |f| \leq \min_{(S,T) \text{ taglio in } G} c(S,T) .$$

Teorema del *massimo flusso/minimo taglio*

Se f^* è un flusso in una rete di flusso (G, c) con sorgente s e pozzo t, allora le seguenti condizioni sono equivalenti

1. *f^* è un flusso massimo in G.*
2. *La rete residua G_{f^*} non contiene alcun cammino aumentante.*
3. *$|f^*| = c(S^*, T^*)$, per qualche taglio (S^*, T^*) di G.*

Osservazione: Dal *Teorema del massimo flusso/minimo taglio* segue che se esiste un flusso massimo allora

$$\max_{f \text{ flusso in } G} |f| = \min_{(S,T) \text{ taglio in } G} c(S, T) .$$

Dimostrazione $(1. \to 2.)$

Si supponga per assurdo che f^* sia un flusso massimo in G ma che G_{f^*} abbia un cammino aumentante p. Allora la somma dei flussi $f^* + f_p^*$ è un flusso in G tale che $|f^* + f_p^*| > |f^*|$, contraddicendo l'ipotesi di massimalità di f^*.

Dimostrazione $(2. \to 3.)$

Si supponga che G_{f^*} non abbia cammini aumentanti, cioè che G_{f^*} non contenga cammini da s a t. Si ponga

$$S^* = \{v \in V : \text{esiste un cammino da } s \text{ a } v \text{ in } G_{f^*}\} \text{ e } T^* = V - S^*.$$

Dato che $s \in S^*$ e $t \in T^*$, la partizione (S^*, T^*) è un taglio. Per ogni coppia di vertici u e v tali che $u \in S^*$ e $v \in T^*$, abbiamo che $f^*(u, v) = c(u, v)$, perchè altrimenti avremmo che $(u, v) \in E_{f^*}$ e v sarebbe nell'insieme S^*. Quindi, per il Lemma 4, $|f^*| = f(S^*, T^*) = c(S^*, T^*)$.

Dimostrazione $(3. \to 1.)$

Si ha

$$c(S^*, T^*) = |f^*| \leq \sup_{f \text{ flusso in } G} |f| \leq \min_{(S,T) \text{ taglio in } G} c(S, T) \leq c(S^*, T^*)$$

da cui segue

$$|f^*| = \sup_{f \text{ flusso in } G} |f| \, .$$

Questa a sua volta implica che $\boxed{|f| \leq |f^*| \, ,}$ per ogni flusso f nella rete G.

Pertanto f^* è un flusso massimo.

Procedura di Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, c, s, t)

– sia $G = (V, E)$

1. **for** $(u, v) \in E$ **do**
2. $\quad f(u, v) = 0$
3. $\quad f(v, u) = 0$
4. **while** esiste un cammino p da s a t nella rete residua G_f **do**
5. $\quad c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v)$ è in $p\}$
6. $\quad$ **for** (u, v) in p **do**
7. $\qquad f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$
8. $\qquad f(v, u) = -f(u, v)$

Analisi di Ford-Fulkerson

Il tempo di esecuzione della procedura di Ford-Fulkerson dipende da come viene determinato il cammino aumentante p alla linea 4.

Se questa scelta viene fatta male la procedura **può anche non terminare**.

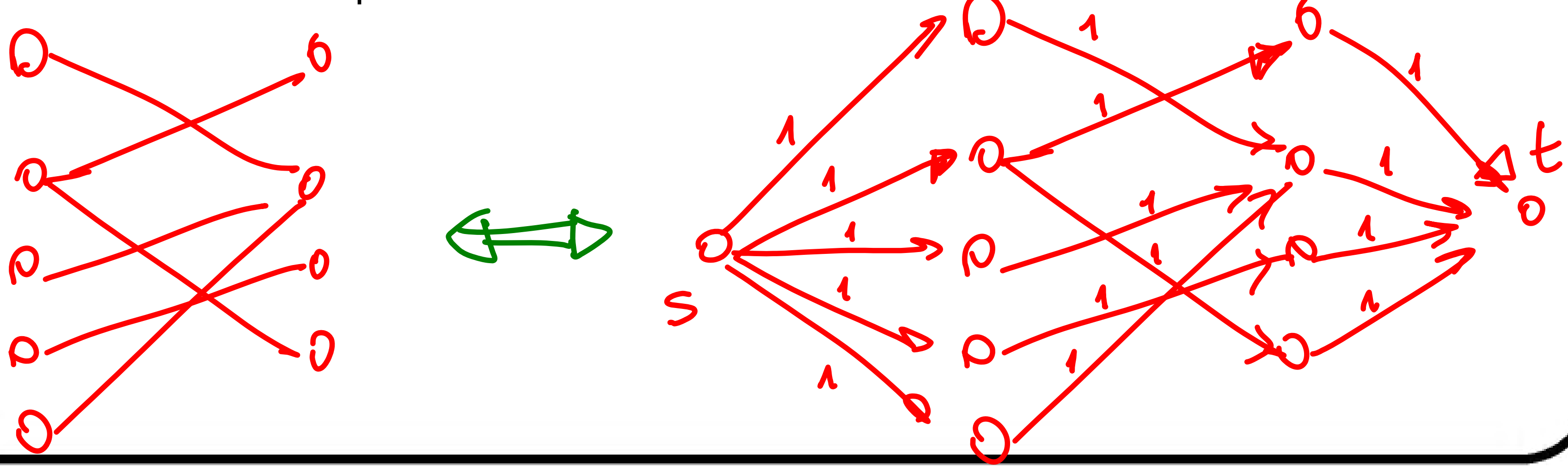
Se si suppone che tutte le capacità della rete siano dei valori interi, allora una semplice implementazione della procedura di Ford-Fulkerson ha un tempo di esecuzione $\mathcal{O}(E|f^*|)$, dove f^* è il flusso massimo trovato dall'algoritmo.

Infatti

- il ciclo **for** 1–3 richiede tempo $\mathcal{O}(E)$
- il ciclo **while** 4–8 viene eseguito al massimo $|f^*|$ volte, perchè il valore del flusso aumenta almeno di una unità ad ogni iterazione; inoltre, ad ogni iterazione, un cammino aumentante può essere calcolato in tempo $\mathcal{O}(E)$, mediante una visita della rete residua G_f da s sino a trovare t.

Applicazione: abbinamento massimo in grafi bipartiti

- abbinamenti in grafi non orientati
- grafi bipartiti
- problema dell'abbinamento massimo in grafi bipartiti
- esempio: abbinamento di jobs e risorse
- riduzione ad un problema di flusso massimo



Algoritmo di Edmonds-Karp

Il limite superiore per il tempo di esecuzione della procedura Ford-Fulkerson può essere migliorato se si realizza il calcolo del cammino aumentante p con una visita in ampiezza, cioè se il cammino aumentante selezionato è un cammino *minimo* da s a t nella rete residua, dove ogni arco ha distanza unitaria.

Chiamiamo il metodo di Ford-Fulkerson così modificato **algoritmo di Edmonds-Karp** e dimostriamo che l'algoritmo di Edmonds-Karp richiede tempo $\mathcal{O}(VE^2)$.

Lemma 5

Se l'algoritmo di Edmonds-Karp viene eseguito su una rete di flusso $G = (V, E)$ con sorgente s e pozzo t, allora per tutti i vertici $v \in V$, la distanza $\delta_f(s, v)$ di v da s nella rete residua G_f è monotona non decrescente nel corso degli incrementi di flusso.

Dimostrazione

Si supponga per assurdo che per qualche vertice $v \in V$ esista un aumento di flusso che faccia decrescere $\delta_f(s, v)$. Sia f il flusso subito prima dell'aumento ed f' il flusso immediatamente dopo. Allora $\boxed{\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)}$.

Si può supporre senza perdere di generalità che $\delta_{f'}(s, v) \leq \delta_{f'}(s, u)$, per tutti i vertici $u \in V$ tali che $\delta_{f'}(s, u) < \delta_f(s, u)$. Equivalentemente possiamo assumere che per ogni vertice $u \in V$, $\delta_{f'}(s, u) < \delta_{f'}(s, v)$ implichi $\delta_f(s, u) \leq \delta_{f'}(s, u)$.

Dimostrazione (continua)

Sia p' un cammino minimo in $G_{f'}$ da s a v e consideriamo il vertice u che precede v lungo questo cammino. Allora si ha $\boxed{\delta_{f'}(s,v) = \delta_{f'}(s,u) + 1}$. Per quanto detto prima abbiamo anche che $\boxed{\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)}$.

Pertanto

$$\begin{array}{lcll} \delta_f(s,v) > \delta_{f'}(s,v) & = & \delta_{f'}(s,u) + 1 & \\ & \geq & \delta_f(s,u) + 1 & \\ \hline\hline caso(a) & \geq & \delta_f(s,v) & \text{se } (u,v) \text{ è in } G_f \\ \hline\hline \\ \hline\hline & = & \delta_f(s,v) + 2 & \\ caso(b) & & & \text{se } (u,v) \text{ non è in } G_f \\ & > & \delta_f(s,v) & \\ \hline\hline \end{array}$$

Dimostrazione (continua)

Infatti, se (u, v) non è in G_f, poichè d'altra parte (u, v) è in $G_{f'}$, il cammino aumentante p scelto in G_f per aumentare il flusso da f ad f' deve contenere l'arco (v, u). Ma p è un cammino minimo e pertanto deve valere $\boxed{\delta_f(s, u) = \delta_f(s, v) + 1}$.

In ogni caso si ottiene una contraddizione, in quanto per ipotesi assurda avevamo supposto che $\boxed{\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)}$.

Pertanto la distanza $\delta_f(s, v)$ di v da s nella rete residua G_f è monotona non decrescente nel corso degli incrementi di flusso.

Teorema

Se l'algoritmo di Edmonds-Karp viene eseguito su una rete di flusso $G = (V, E)$ *con sorgente* s*, pozzo* t *e capacità* $c : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$*, allora il numero totale di incrementi di flusso effettuati nel corso della sua computazione è* $|V| \cdot |E|$.

Dimostrazione

Diciamo che un arco (u, v) in una rete residua G_f è **critico** su un cammino aumentante p se $c_f(p) = c_f(u, v)$. Dopo aver aumentato il flusso lungo un cammino aumentante, ogni suo arco critico scompare dalla rete residua.

Sia (u, v) un arco in una rete residua di G.

Quante volte può l'arco (u, v) scomparire (per poi eventualmente ricomparire)?

Poichè i cammini aumentanti sono minimi, quando (u, v) è critico in una rete residua G_f lungo il cammino aumentante selezionato, si ha

$$\boxed{\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1}.$$

Dimostrazione (continua)

Perchè (u, v) ricompaia nuovamente nella rete residua, è necessario che (v, u) si trovi su un cammino aumentante in una rete residua $G_{f'}$ successiva a G_f.

Quindi, poichè per il Lemma 5 $\delta_{f'}(s, v) \geq \delta_f(s, v)$, si avrà che

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s, u) &= \delta_{f'}(s, v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s, v) + 1 \\ &= \delta_f(s, u) + 2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, dal momento in cui (u, v) diventa critico al momento in cui diventa nuovamente critico, la distanza di u dalla sorgente deve aumentare di almeno 2 unità. Sino a quando u è raggiungibile dalla sorgente, la sua distanza da s è compresa tra 0 e $|V| - 2$. Quindi (u, v) può scomparire al più $|V|/2$ volte. Poichè vi sono al più $2 \cdot |E|$ coppie di vertici che possono essere estremi di un arco in una rete residua, il numero totale di possibili incrementi di flusso è al più $|V| \cdot |E|$.

Corollario

La complessità dell'algoritmo di Edmonds-Karp è al massimo $\mathcal{O}(VE^2)$.

Dimostrazione

Dal teorema precedente segue che il numero di incrementi di flusso è al più $|V| \cdot |E|$. Inoltre il costo computazionale di ciascun incremento è $\mathcal{O}(E)$ (effettuando una visita in ampiezza dalla sorgente s nella rete residua sino a trovare il pozzo t). Pertanto segue la tesi.