EDGE-CONNECTIVITY

Domenico Cantone

January 27, 2016

Edge-connectivity

Sia $G = (V, E)$ un grafo non-orientato connesso.
L'EDGE-CONNECTIVITY di G è il minimo numero di archi che occorre rimuovere da G perché il grafo risultante sia sconnesso.
Esempi:

- un grafo lineare ha edge-connectivity uguale a 1;
- un ciclo semplice ha edge-connectivity uguale a 2.

Un TAGLIO in $G = (V, E)$ è una partizione non banale $\langle V_1, V_2 \rangle$ di V.
La DIMENSIONE $|\langle V_1, V_2 \rangle|$ di un taglio $\langle V_1, V_2 \rangle$ è data dal numero di archi che lo attraversano, cioè:

$$|\langle V_1, V_2 \rangle| =_{Def} |\{(u, v) \in E \,:\, u \in V_1\,,\; v \in V_2\}|\,.$$

Edge-connectivity e insiemi di sconnessione

Dato un grafo $G = (V, E)$ non-orientato e connesso, un INSIEME DI SCONNESSIONE PER G è un insieme *minimale* $D \subseteq E$ di archi tale che $(V, E \setminus D)$ sia sconnesso.

Se (V_1, E_1) e (V_2, E_2) sono le due componenti connesse generate da un insieme di sconnessione D, allora $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio di $G = (V, E)$ attraversato esattamente dagli archi in D.

Viceversa, se $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio di $G = (V, E)$, gli archi che lo attraversano contengono un insieme di 2-sconnessione per G.

Quindi, in particolare, se $\langle V_1^*, V_2^* \rangle$ è un taglio minimo di $G = (V, E)$ (cioè ha dimensione minima tra tutti i possibili tagli di G), allora l'insieme $D^* \subseteq E$ degli archi che lo attraversano è un insieme di sconnessione di cardinalità minima per $G = (V, E)$.

Pertanto, l'edge-connectivity di un grafo $G = (V, E)$ è uguale alla dimensione di un suo taglio minimo.

Come determinare un taglio minimo in un grafo non-orientato connesso?

Sia $\langle V_1, V_2 \rangle$ un taglio di $G = (V, E)$.
Sia $s \in V_1$ e $t \in V_2$ e si consideri la rete di flusso $(V, \vec{E}, s, t, c)$ a capacità unitaria indotta da G, s e t, così definita:

$$\begin{aligned} \vec{E} &:= \{(u, v) : (u, v) \in E \text{ oppure } (v, u) \in E\} \\ c(u, v) &:= 1, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in \vec{E}. \end{aligned}$$

Allora $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio nella rete di flusso $(V, \vec{E}, s, t, c)$, la cui capacità è uguale a $|\langle V_1, V_2 \rangle|$.
Quindi, un taglio minimo di $G = (V, E)$ corrisponde ad un taglio di capacità minima in una rete a capacità unitaria indotta da G.

Come determinare un taglio minimo in un grafo non-orientato connesso?

Si ha pertanto il seguente algoritmo:

$\textsc{Construct-Minimum-Cut}(V, E)$
- sia $s \in V$

$\mathcal{T} := \langle \{s\}, V \setminus \{s\} \rangle$ -- *$\mathcal{T}$, inizializzato ad un taglio qualunque, conterrà il taglio minimo*

for $t \in V \setminus \{s\}$ **do**
- sia $(V, \vec{E}, s, t, c)$ la rete di flusso a capacità unitaria indotta da $G = (V, E)$ e $s, t \in V$
- si determini un taglio minimo $\langle V_1, V_2 \rangle$ nella rete $(V, \vec{E}, s, t, c)$

if $|\langle V_1, V_2 \rangle| < |\mathcal{T}|$ **then**

$\mathcal{T} := \langle V_1, V_2 \rangle$

return $\mathcal{T}$, $|\mathcal{T}|$

Complessità di CONSTRUCT-MINIMUM-CUT

La complessità di CONSTRUCT-MINIMUM-CUT è dominata dalle $\mathcal{O}(V)$ computazioni di tagli minimi nelle reti a capacità unaria $(V, \vec{E}, s, t, c)$, al variare di $t \in V \setminus \{s\}$.

Ad esempio, se tali computazioni vengono effettuate mediante l'algoritmo di Ford-Fulkerson, si ottiene una complessità computazionale di $\mathcal{O}(VE^2)$, mentre invece se vengono effettuate mediante l'algoritmo di Edmonds-Karp, si ottiene una complessità di $\mathcal{O}(V^2E^2)$.