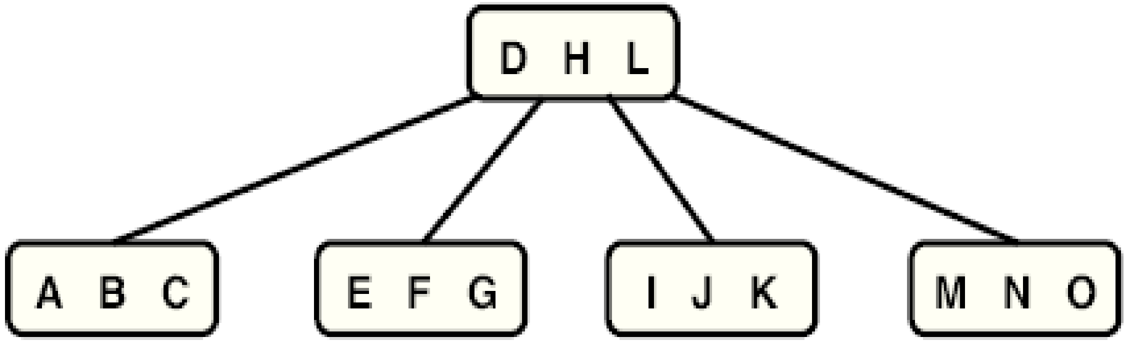
PROVA ITINERE 16/12/15

(a) Si definisca in maniera precisa la nozione di B-albero.

(b) Si dia e si dimostri una maggiorazione dell'altezza di un B-albero in funzione del suo grado minimo e del numero di chiavi in esso contenute.

(c) Si consideri il seguente albero [redacted]

2, 3, 5



Si stabilisca se esso possa essere considerato un B-albero e, in caso affermativo, si dica quali sono i valori di grado minimo compatibili con esso. (Si giustifichino adeguatamente le risposte.)

$t-1 \leq$ min # chiavi

$t-1 \leq$ # chiavi $\leq 2t-1$

$\boxed{t-1 \leq 3 \leq 2t-1}$

max # chiavi $\leq 2t-1$

$t-1 \leq 2$ $\qquad t \leq 3$

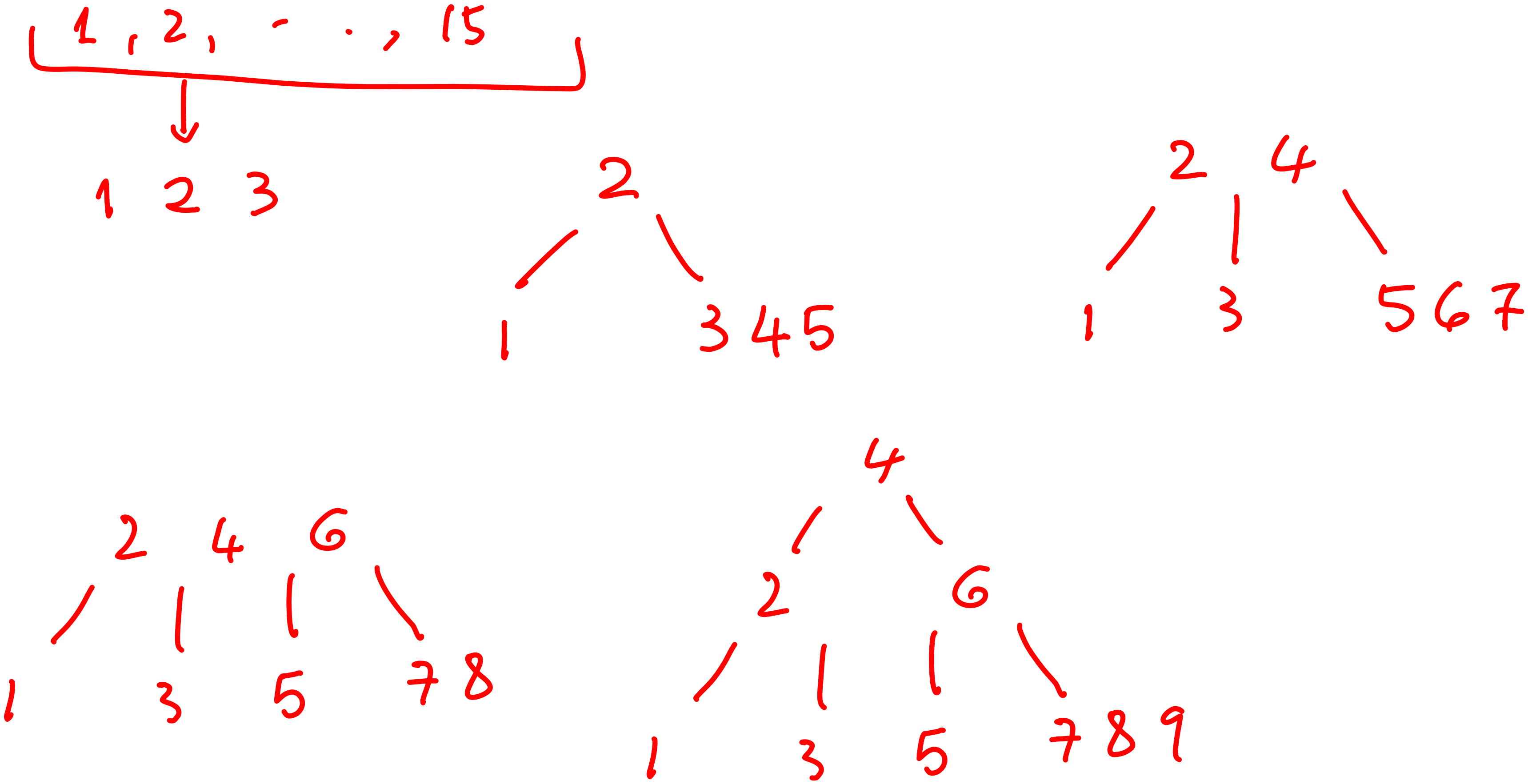
$5 \leq 2t-1$ $\qquad t \geq 3$

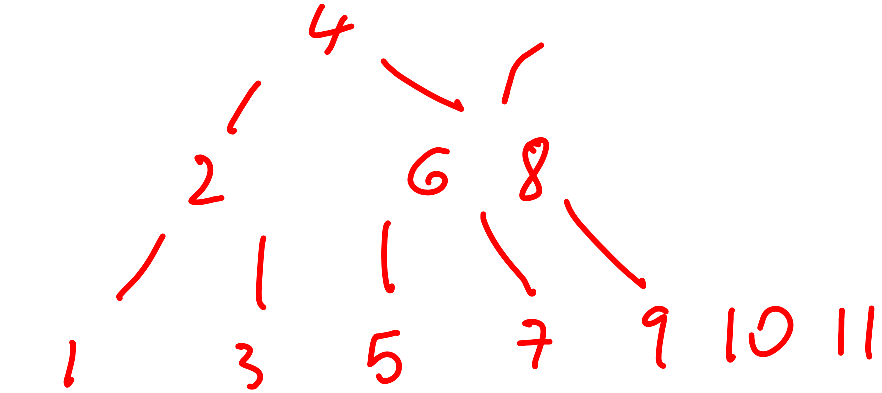
$\boxed{2 \leq t \leq 4}$

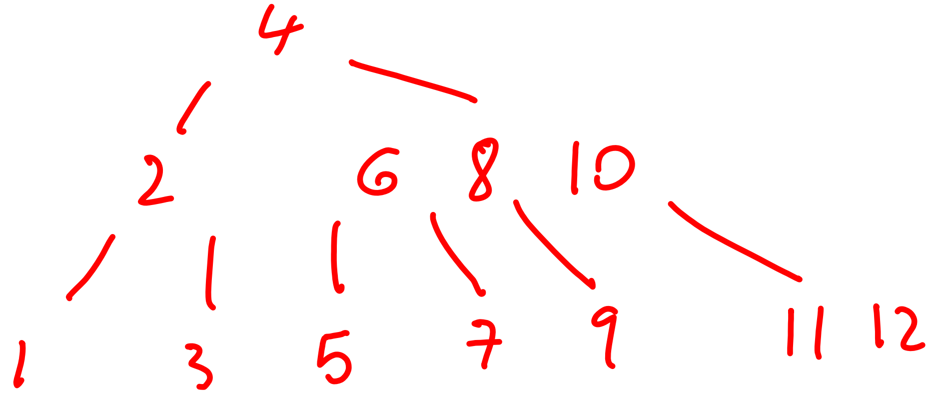
$\boxed{3}$

(a) Si definisca la struttura dati di B-albero. 0

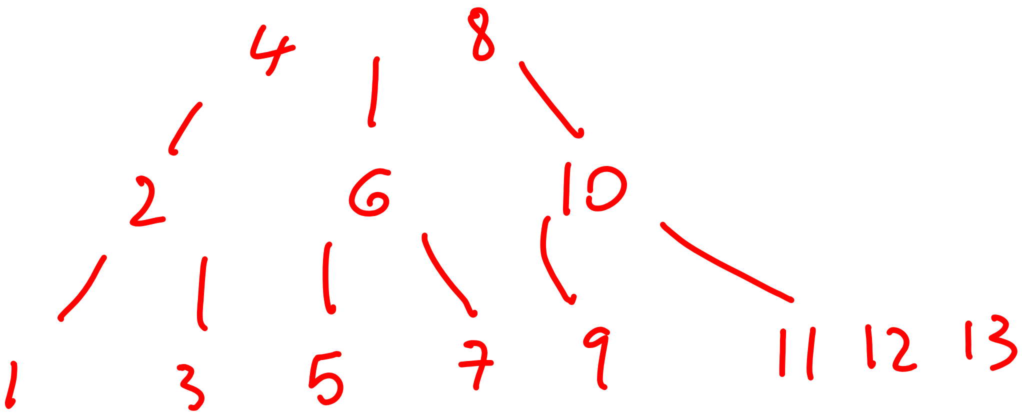
(b) Si costruisca un B-albero di grado minimo 2 contenente almeno 15 chiavi.

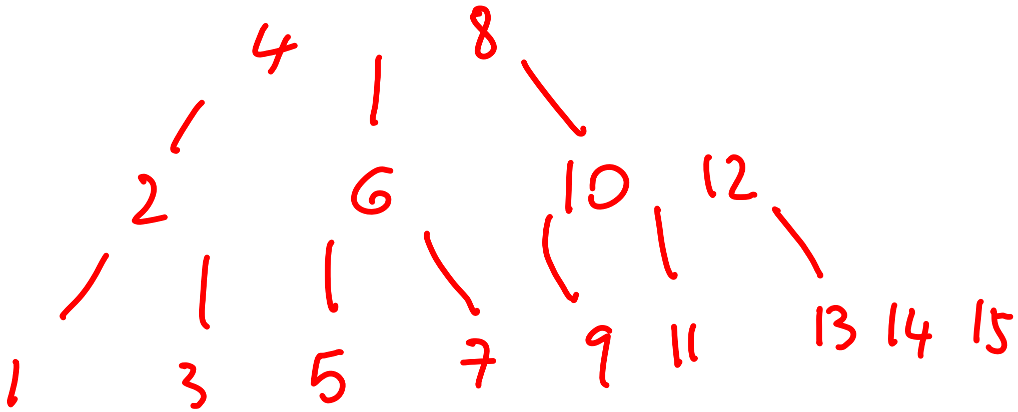



4
2 6 8
1 3 5 7 9 10 11


4
2 6 8 10
1 3 5 7 9 11 12

$t = 2$


4 8
2 6 10
1 3 5 7 9 11 12 13


4 8
2 6 10 12
1 3 5 7 9 11 13 14 15

(a) Quali sono le proprietà caratterizzanti il *grado minimo* di un B-tree?

(b) Enunciare e dimostrare una maggiorazione in funzione di t ed n dell'altezza h di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi.

(c) [Facoltativo] Dare una *minorazione* in funzione di t ed n dell'altezza h di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi.

$$\boxed{h \le \log_t \frac{n+1}{2}}$$

$$m(h,t) \le n$$

chiavi in un B-tree di grado t e altezza h contenente il numero massimo di chiavi

$$\Downarrow$$

$$n \le \underbrace{M(h,t)}$$

profondità	# nodi	# chiavi
0	1	$2t-1$
1	$2t$	$2t(2t-1)$
2	$(2t)^2$	$(2t)^2(2t-1)$
3	$(2t)^3$	$(2t)^3(2t-1)$
$\vdots$	$\vdots$	
h	$(2t)^h$	$(2t)^h(2t-1)$

$$\cancel{\frac{(2t)^{h+1}-1}{2t-1}}$$

$$M(h,t) = (2t-1)\sum_{i=0}^{h}(2t)^i = \cancel{(2t-1)}\,\frac{(2t)^{h+1}-1}{\cancel{2t-1}}$$

$$M(h,t) = (2t)^{h+1} - 1$$

$$n \le (2t)^{h+1} - 1 \;\rightarrow\; n+1 \le (2t)^{h+1}$$

$$\rightarrow\; h+1 \ge \log_{2t}(n+1) \;\rightarrow\; h \ge \log_{2t}(n+1) - 1$$

$$\log_t \frac{n+1}{2} \ge \boxed{h \ge \log_{2t}\left(\frac{n+1}{2t}\right)}$$

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo t.

\# nodi

1

$2t$

$(2t)^2$

$(2t)^3$

$\vdots$

$(2t)^h$

$$\sum_{i=0}^{h} (2t)^i = \frac{(2t)^{h+1} - 1}{2t - 1}$$

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero minimo e il numero massimo di chiavi che possono essere contenute nelle foglie di un B-tree di grado minimo t avente altezza h.

	# nodi	# chiavi
0	1	1
1	2	$2(t-1)$
2	$2t$	$2t(t-1)$
3	$2t^2$	$2t^2(t-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h	$2t^{h-1}$	$2t^{h-1}(t-1)$
	$1+2\frac{t^h-1}{t-1}$	$1+2(t-1)\frac{t^h-1}{t-1} = 1+2t^h-2 = 2t^h-1$

$$2t^{h-1}(t-1) \leq \; ?? \; \leq (2t)^h(2t-1)$$

Date le funzioni

$$\text{max\_key}(h,t) = (2t)^{h+1} - 1$$

$$\text{min\_key}(h,t) =_{Def} \text{mimimo numero di chiavi in un } B\text{-tree di grado minimo } t \text{ e altezza } h$$
$$\text{max\_key}(h,t) =_{Def} \text{massimo numero di chiavi in un } B\text{-tree di grado minimo } t \text{ e altezza } h\,,$$

$$\text{min\_key}(h,t) = 2t^h - 1$$

(a) si espliciti la funzione

$$q(h,t) =_{Def} \frac{\text{max\_key}(h,t)+1}{\text{min\_key}(h,t)+1} = 2^h t$$

in funzione di h e di t;

(b) quindi, sapendo che il grado minimo t di un dato B-tree di altezza h è dispari e che $q(h,t) = 48128$, si determini h e t;

(c) infine, si definisca in maniera precisa la struttura dati B-tree.

48128	2
24064	2
12032	2
6016	2
3008	2
1504	2
752	2
376	2
188	2
94	2
47	

$$q(h,t) = \frac{(2t)^{h+1}}{2t^h} = 2^h t$$

$$2^h t = \boxed{48128} = 2^{10} \cdot 47$$

$h = 10$

$t = 47$

ESERCIZIO 1.

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei *B-tree*, si determini il numero minimo e il numero massimo di *nodi* che possono essere contenuti in un B-tree di grado minimo t ed altezza h.

(a) Si definisca in maniera precisa la struttura dati dei B-tree.

(b) Sia T un B-tree di grado minimo t contenente m nodi. Si fornisca una maggiorazione della sua altezza h in funzione di m e t.

$$1 + 2\frac{t^h - 1}{t-1} \le m \le \frac{(2t)^{h+1} - 1}{2t-1}$$ ⇐ relazione sui nodi

$$t^h \le \frac{m-1}{2}(t-1) + 1 = \frac{mt - m - t + 3}{2}$$

$$\ldots \le h \le \log_t\left(\frac{m-1}{2}(t-1)+1\right) \Leftarrow$$

$$h \le \log_t\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

(a) Si definisca in maniera precisa la struttura dati dei B-tree.

(b) Sia T un B-tree di altezza h contenente n chiavi. Si fornisca una maggiorazione del suo grado minimo t (in funzione di n e h).

$$2t^h - 1 \leq n \leq (2t)^{h+1} - 1$$

$$\Uparrow \qquad \Nwarrow$$

$$2t^h \leq n+1$$

$$t^h \leq \frac{n+1}{2}$$

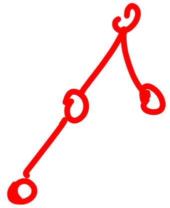
$$n+1 \leq (2t)^{h+1}$$

$$\sqrt[h+1]{n+1} \leq 2t$$

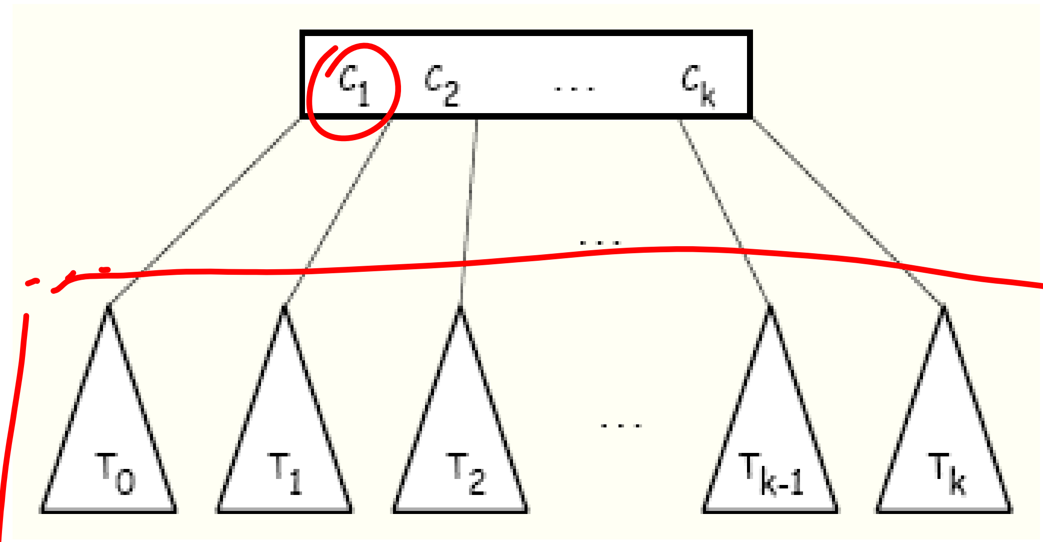
$$\underbrace{\frac{\sqrt[h+1]{n+1}}{2} \leq t \leq \sqrt[h]{\frac{n+1}{2}}}$$

(a) Si definisca in maniera precisa la struttura dati dei B-tree.

(b) Siano $T_0, T_1, \ldots, T_k$, alberi [redacted] e siano $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{N}$ costanti tali che $\boxed{c_1 < c_2 < \cdots < c_k}$. Quali condizioni debbono essere soddisfatte perchè il seguente albero sia un B-tree?



$k \le 2t - 1$



$T_0 < c_1 < T_1 < c_2 < \ldots$

$t - 1 \le \#$ chiavi $\le 2t - 1$

m = minimo numero di chiavi in un nodo di qualche T_i

M = massimo numero di chiavi in un nodo di qualche T_i

$\boxed{t-1 \leq m}$,

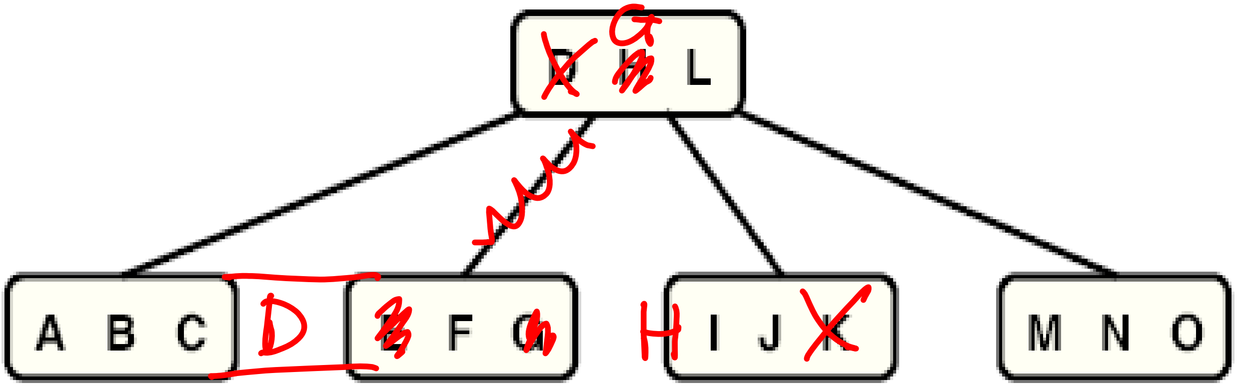
$$\underbrace{M \leq 2t-1 \quad , \quad k \leq 2t-1}$$

$$\boxed{\max(M, k) \leq 2t-1}$$

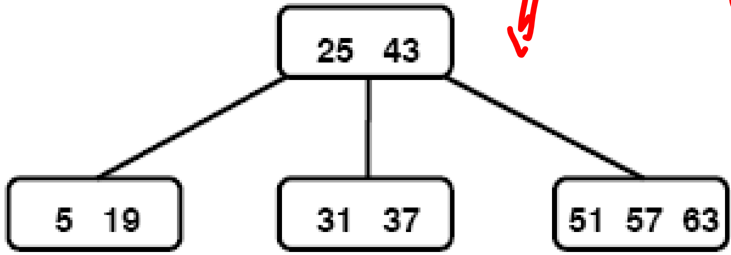
Si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni

DELETE **E**, DELETE **K**, INSERT **E**, INSERT **K**

(nell'ordine dato) nel seguente B-tree di grado minimo 4:



$\boxed{3}$



(a) Si definisca la struttura dati dei B-tree.

(b) Sia T l'insieme dei valori $t \in \mathbb{N}$ per i quali l'albero $\mathcal{T}$ in figura possa essere considerato un B-tree di grado minimo t e si ponga

$$m = \min T\,, \qquad M = \max T\,.$$

(b.1) Quanto valgono m ed M? (Motivare la risposta.)

(b.2) Si illustri l'inserimento delle chiavi ~~54~~, ~~52~~ e ~~53~~ in $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo m.

(b.3) Si illustri la cancellazione delle chiavi ~~37~~, ~~43~~ e ~~57~~ da $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo M.