Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} \overset{9}{\cancel{10}} \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 4 \\ 5 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$c_i \leq 10\, i$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} 10\, i = \underline{O(n^2)}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin 4^{\mathbb{N}}}}^{n} 5 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 4^{\mathbb{N}}}}^{n} 10\, i \Rightarrow \overset{9}{\cancel{10}} \underbrace{\left(4^0 + 4^1 + \dots + 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}\right)}$$

$$\overset{9}{\cancel{10}} \, \frac{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor + 1} - 1}{4 - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$= 5\left(n - \lfloor \log_4 n \rfloor - 1\right) + \frac{\overset{9}{\cancel{10}}}{\cancel{3}}\overset{3}{} \left(4^{\lfloor \log_4 n \rfloor + 1} - 1\right)$$

$$\leq 5n + 3 \cdot \underbrace{4^{\log_4 n + 1}}$$

$$4^{\log_4 n + 1} = 4^{\log_4 n} \cdot 4$$

$$= 4n$$

$$= 5n + 3 \cdot 4n$$

$$= 17n$$

$$T(n) \leq 17n$$

$$\hat{c} \leq 17$$

1	9
2	5
3	5
4	$9 \cdot 4$ ←
5	5
6	5
⋮	⋮
15	5
16	$9 \cdot 4^2$ ←
17	5
⋮	⋮
$i \rightarrow$ ⋮	1
4^k	—

$$\frac{9 \cdot 4^k}{4^k - 4^{k-1}} = $$

$$= \frac{\cancel{9}^{3} \cdot \cancel{4^k}}{\cancel{4^{k-1}}\,\cancel{(4-1)}} = 12$$

$$\Downarrow$$

$$4^k - 4^{k-1}$$

$$\phi(i) = 12\left(i - 4^{\lfloor \log_4 i \rfloor}\right)$$

$$0$$

$$\phi_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ 12\left(i - 4^{\lfloor \log_4 i \rfloor}\right) & \text{se } i \geq 1 \end{cases}$$

$$\phi_i \geq \phi_0 \quad \forall\, i \geq 0 .$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Delta\phi_i$$

$$\lfloor \log_4 i \rfloor = \lfloor \log_4 (i-1) \rfloor$$

$$i \notin 4^{\mathbb{N}}$$

$$\hat{c}_i = 5 + \phi_i - \phi_{i-1} = 5 + 12\left(\cancel{i} - \cancel{4^{\lfloor \log_4 i \rfloor}}\right) - 12\left(\cancel{i} - 1 - \cancel{4^{\lfloor \log_4 (i-1) \rfloor}}\right)$$

$$= 5 + 12 = 17$$

$i = 1$

$$\hat{c}_1 = 9 + \phi_1 - \phi_0 = 9 + 12\left(\cancel{1 - 4^{\lfloor \log_4 1 \rfloor}}\right)$$

$$= 9$$

$i \in 4^{\mathbb{N}} \wedge i \neq 1$ $\qquad \log_4 i = \lfloor \log_4 i \rfloor = \lfloor \log_4 (i-1) \rfloor + 1$

$$\hat{c}_i = 9i + \Delta\phi_i = 9i + 12\left(\cancel{i} - 4^{\lfloor \log_4 i \rfloor}\right) - 12\left(\cancel{i} - 1 - 4^{\lfloor \log_4 (i-1) \rfloor}\right)$$

$$= 9i + 12(-i) - 12\left(-1 - \frac{i}{4}\right)$$

$$= \cancel{9i} - \cancel{12i} + 12 + \cancel{3i}$$

$$= 12$$

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 16 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 4 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 5^{\mathbb{N}}}}^{n} c_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin 5}}^{n} c_i$$

$$5^0 \quad 5^1 \quad \ldots \quad 5^{\lfloor \log_5 n \rfloor}$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \in 5^{\mathbb{N}}}}^{n} 16\, i + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin 5}}^{n} 4$$

$$\leq 4n + 16 \sum_{j=0}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} 5^j = 4n + 16 \frac{5^{\lfloor \log_5 n \rfloor + 1} - 1}{5 - 1}$$

$$\leq 4n + 16 \frac{5^{\log_5 n + 1} - 1}{5 - 1}$$

$$\leq 4n + 16\,\frac{5n-1}{4} < 4n + 20n = \underbrace{24}\,n$$

$$5^k \leq n < 5^{k+1}$$

$$\underbrace{k \leq \log_5 n < k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$k = \lfloor \log_5 n \rfloor$$

$$\frac{16 \cdot 5^k}{5^k - 5^{k-1}} = \frac{\cancelto{4}{16} \cdot 5^{\cancel{k}}}{\cancel{5^{k-1}}(\cancel{5-1})} = \underline{\underline{20}}$$

$$\Phi(i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \underbrace{20\left(i - 5^{\lfloor \log_5 i \rfloor}\right)} & i > 0 \end{cases}$$

$i \geq 5^{\lfloor \log_5 i \rfloor}$

$\boxed{\phi(i) \geq \phi(0)}$

$\hat{c}_{\sim}$

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 15 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 4 \\ 5 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$