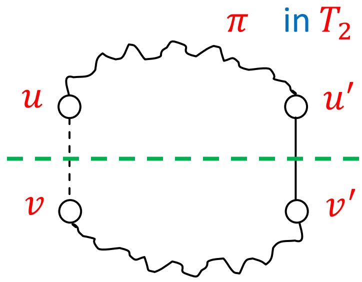
Proprietà Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e connesso con funzione peso $w: E \rightarrow R$ Iniettiva.

Allora G ha un unico MST.

DIM



Siano $T_1 \neq T_2$ due MST di G.

Sia $(u, v) \in E[T_1] \,\Delta\, E[T_2]$,

un arco appartenente alla differenza simmetrica tra gli archi di T_1 e di T_2 .

In particolare supponiamo che $(u, v) \in E[T_1] \setminus E[T_2]$,

e sia π un cammino da u a v in T_2 ,

ovviamente $\pi \nsubseteq T_1$ perché altrimenti ci sarebbe un ciclo nell'albero T_1 .

Cancellando l'arco (u, v) da T_1 si ottengono due componenti connesse che determinano un taglio (V_1, V_2) attraversato da qualche arco del cammino π .

Sia (u', v') un arco del cammino π che attraversa il taglio.

Notiamo che $(u', v') \in T_2$ e $(u', v') \notin T_1$,

inoltre $w(u', v') \neq w(u, v)$ perché la funzione peso è iniettiva.

Allora sono possibili i seguenti casi:

- Caso $w(u', v') > w(u, v)$

  Sostituiamo in T_2 l'arco (u', v') con l'arco (u, v) .

  Sia $T_2' = T_2 \setminus \{(u', v')\} \cup \{(u, v)\}$.

  Otteniamo $w(T_2') = w(T_2) - w(u', v') + w(u, v) < w(T_2)$

  ASSURDO, in quanto T_2' è un albero ricoprente.

  Otteniamo un albero ricoprente con peso minore rispetto al MST.

- Caso $w(u', v') < w(u, v)$

  Sostituiamo in T_1 l'arco (u, v) con l'arco (u', v') .

  Sia $T_1' = T_1 \setminus \{(u, v)\} \cup \{(u', v')\}$.

  Otteniamo $w(T_1') = w(T_1) - w(u, v) + w(u', v') < w(T_1)$

  ASSURDO, in quanto T_1' è un albero ricoprente.

  Otteniamo un albero ricoprente con peso minore rispetto al MST.

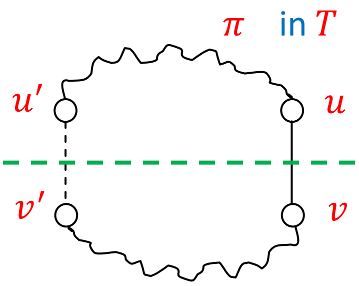
Segnatura minima

Con segnatura di un albero ricoprente di un dato grafo pesato indichiamo la sequenza dei pesi degli archi dell'albero in ordine non decrescente.

Conveniamo di confrontare le segnature degli alberi ricoprenti secondo l'ordinamento lessicografico.

Proprietà Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e connesso con funzione peso $w: E \to R$. Un albero ricoprente di G con segnatura minima è un MST di G.

DIM



Sia T un albero ricoprente di G con segnatura minima.
Supponiamo per assurdo che T non sia un MST.
Sia T' un MST di G tale che
$E[T] \,\Delta\, E[T']$ abbia cardinalità minima.
Sia $(u', v') \in E[T'] \setminus E[T]$
e sia π un cammino da u' a v' in T.
Sia (u, v) un arco in π che attraversa il taglio di G indotto dalle componenti connesse di $T' \setminus \{(u', v')\}$.
Per la minimalità del peso di T', si ha che $w(u', v') \leq w(u, v)$.
Sostituiamo in T l'arco (u, v) con l'arco (u', v'),
sia quindi $T_0 = (T \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(u', v')\}$.
Ragioniamo per casi:

- Caso $w(u', v') < w(u, v)$
  T_0 avrebbe una segnatura lessicograficamente minore di quella di T,
  ASSURDO, in quanto la segnatura di T è minima per ipotesi.
- Caso $w(u', v') = w(u, v)$
  T_0 avrebbe la medesima segnatura di T, dunque minima,
  ma $|\, E[T_0] \,\Delta\, E[T'] \,| < |\, E[T] \,\Delta\, E[T'] \,|$,
  poichè l'arco $(u', v') \in E[T']$ è stato aggiunto all'albero T_0,
  contraddicendo la minimalità di $|\, E[T] \,\Delta\, E[T'] \,|$, ASSURDO.

Corollario

Tutti i MST di un grafo pesato e connesso hanno la medesima segnatura.

DIM

Per la proprietà precedente, tutti i MST di uno stesso grafo pesato e connesso hanno segnatura minima secondo l'ordinamento lessicografico.
Pertanto hanno la medesima segnatura.