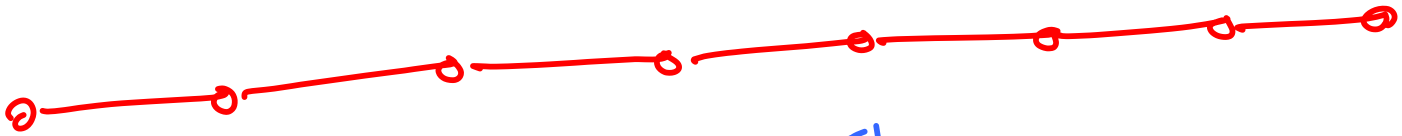
EDGE CONNECTIVITY

L'edge-connectivity di un grafo $G = (V, E)$ non-orientato connesso è il minimo numero di archi che occorre rimuovere da G per sconnetterlo.

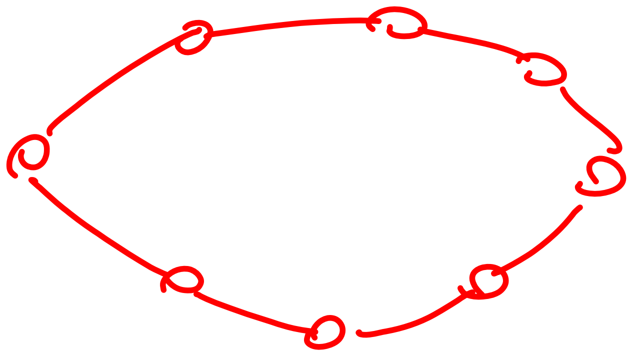
In altre parole, l'edge-connectivity di un dato grafo G è k se

- rimuovendo da G qualunque suo sottoinsieme di $(k-1)$ archi, il grafo resta connesso
- esiste qualche sottoinsieme di k archi la cui rimozione causa la sconnessione del grafo

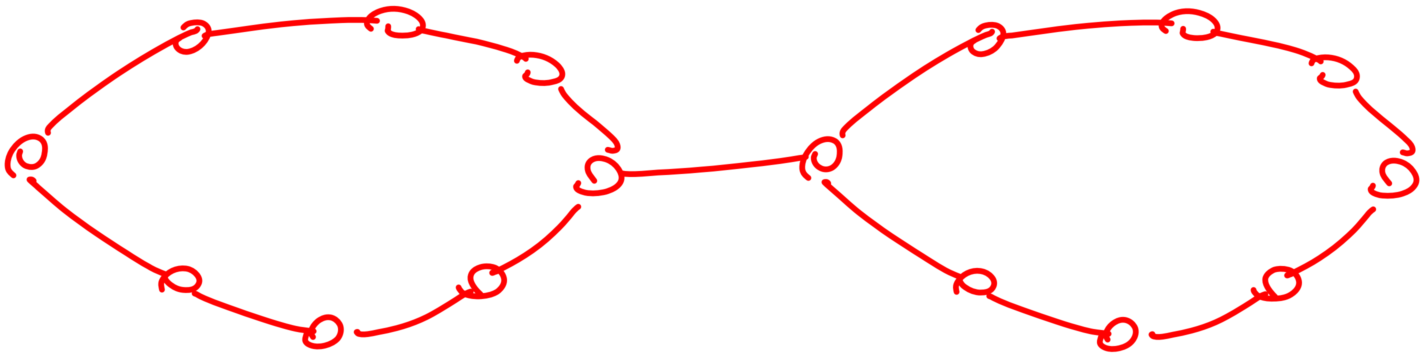
Es.

- 

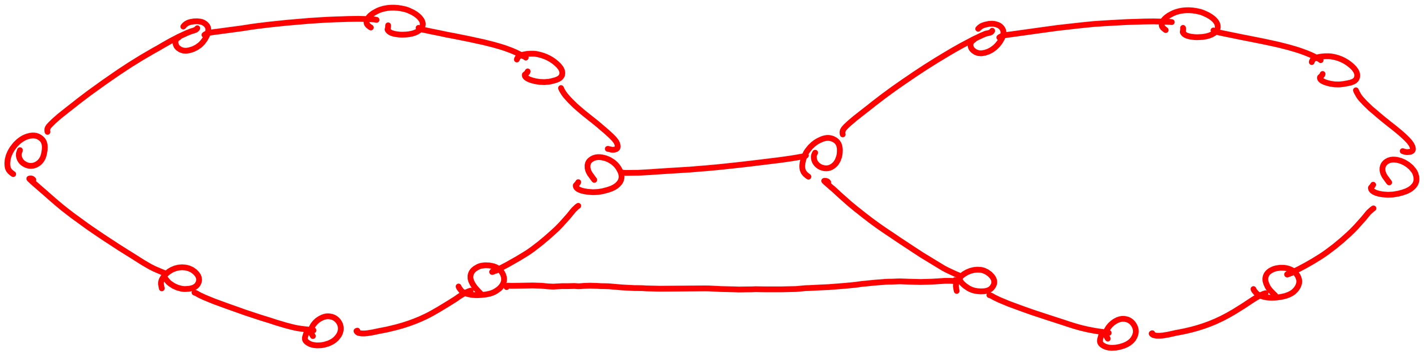
  edge-connectivity = 1

- 

  edge-connectivity = 2

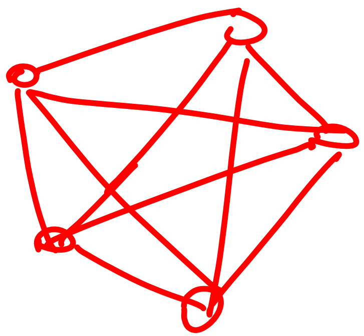
- 

  edge-connectivity = 1

- 

edge-connectivity = 2

- K_n : grafo completo con n vertici

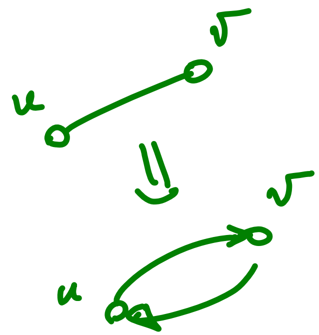
K_5 

edge-connectivity$(K_n) = n-1$

VERIFICARE!!

Dato $G=(V,E)$ non-orientato connesso,

- si selezioni $r \in V$
- si sostituisca ciascun arco (non-orientato) $(u,v) \in E$ in G con la coppia di archi orientati (u,v), (v,u)



- sia $\vec{E}$ l'insieme degli archi orientati così costruito e sia $\vec{G}=(V,\vec{E})$
- si ponga $c(u,v)=1$ per ogni $(u,v) \in \vec{E}$ (capacità in $\vec{G}$)

- per ogni $w \in V \setminus \{v\}$ si calcoli un flusso massimo f_w nella rete $(\vec{G}, c, v, w)$ con sorgente v e pozzo w e sia f^* il flusso di valore minimo tra i flussi massimi $\{f_w : w \in V \setminus \{v\}\}$ calcolati

- $|f^*|$ è l'edge connectivity di $G=(V,E)$

Complessità:

$O(|V|)$ max-flow, ciascuno di complessità

$O(E^2)$

$O(VE^2)$

Correttezza

(P1) Sia f_r un flusso massimo in $(\vec{G}, c, r, w)$. Allora esiste un insieme di sconnessione di G di cardinalità $|f_r|$.

Sia k l'edge-connectivity di G.

$(P1) \Rightarrow |f_r| \geq k$

e quindi $|f^*| \geq k$.

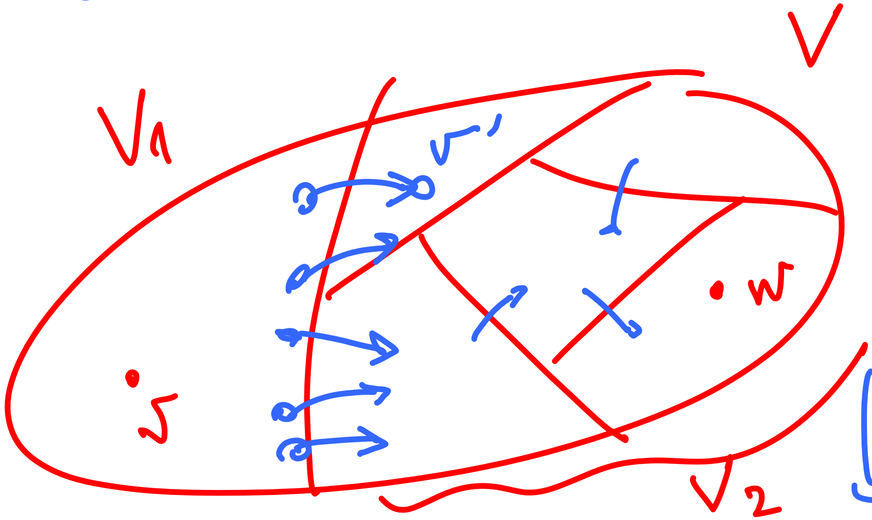
(P2) Sia D un insieme di sconnessione di G. Allora per ciascun $w \in V \setminus \{v\}$, si ha: $|f_w| \le |D|$.

$(V, E \setminus D)$

V_1 componente connessa di $(V, E \setminus D)$ contenente v.

Sia $w \in V \setminus V_1$ e sia $V_2 = V \setminus V_1$.

(V_1, V_2) è un taglio di $(\vec{G}, c, v, w)$.



$|f_w| \le c(V_1, V_2) \le |D|$

$$|D| = k \Rightarrow \exists f_r : |f_r| \le k$$

$$\rightarrow |f^*| \le k$$

DA (P1) e (P2) segue $|f^*| = k$, da cui la correttezza del nostro algoritmo.