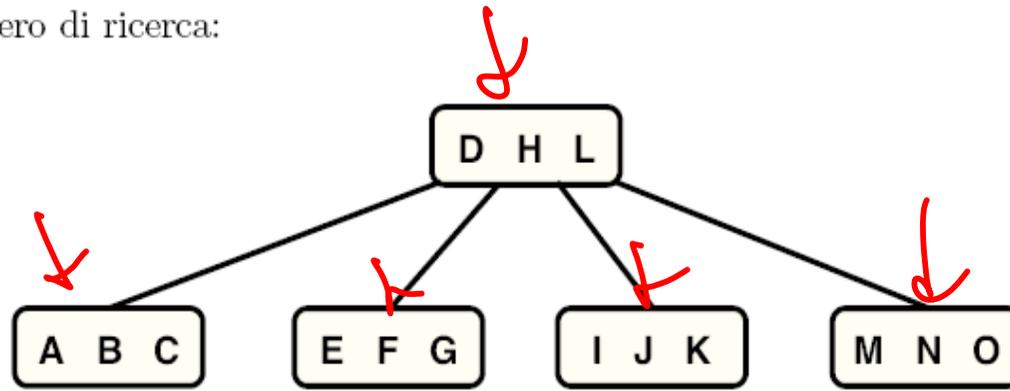


- (a) Si definisca in maniera precisa la nozione di B -albero.
 (b) Si dia e si dimostri una maggiorazione dell'altezza di un B -albero in funzione del suo grado minimo e del numero di chiavi in esso contenute.
 (c) Si consideri il seguente albero di ricerca:



Si stabilisca se esso possa essere considerato un B -albero e, in caso affermativo, si dica quali sono i valori di grado minimo compatibili con esso. (Si giustificino adeguatamente le risposte.)

$$t-1 \leq 3 \leq 2t-1$$



$$2 \leq t \leq 4$$

$$4 \leq 2t$$

$$2 \leq t$$

ESERCIZIO 2.

H, L, M, A, B, Z, Q, R, S, U, T, V, D, C, P

- (a) Si definisca la struttura dati di *B*-albero.
- (b) Si costruisca un *B*-albero di grado minimo 2 contenente almeno 15 chiavi.

3

H

HL

HLM

ESERCIZIO 2.

- (a) Quali sono le proprietà caratterizzanti il *grado minimo* di un B-tree? ✓
- (b) Enunciare e dimostrare una maggiorazione in funzione di t ed n dell'altezza h di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi. ✓
- (c) ~~[Facoltativo]~~ Dare una *minorazione* in funzione di t ed n dell'altezza h di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi.

? $\leq h \leq \log_t \left(\frac{n+1}{2} \right)$

Livello	# nodi	# chiavi
0	1	$2t-1$
1	$2t$	$2t(2t-1)$
2	$(2t)^2$	$(2t)^2(2t-1)$
3	$(2t)^3$	$(2t)^3(2t-1)$
⋮	⋮	⋮
h	$(2t)^h$	$(2t)^h(2t-1)$

$N(h, t)$

$$(2t-1) \cdot \sum_{i=0}^{\binom{h}{2}} (2t)^i = \cancel{(2t-1)} \cdot \frac{(2t)^{h+1} - 1}{\cancel{2t-1}}$$

$\swarrow N(h,t)$

$$n \leq (2t)^{h+1} - 1$$

$$h+1 \leq (2t)^{h+1}$$

$$1 = \log_{2t} 2t$$

$$\log_{2t} (n+1) \leq h+1$$

$$\log_{2t} (n+1) - 1 \leq h$$

$$\log_{2t} \left(\frac{n+1}{2t} \right) \leq h \leq \log_t \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

ESERCIZIO 3.

- (a) Si definisca in maniera precisa la struttura dati B-tree e se ne illustri sinteticamente un'applicazione.
- (b) Si effettui l'inserimento delle chiavi D, G, R, F, M, H, P, Q, I, L, A, B, C (nell'ordine dato) in un B-tree di grado minimo 2, inizialmente vuoto, e quindi si cancelli la chiave F.
- (c) Si diano una minorazione ed una maggiorazione dell'altezza h di un B-tree di grado minimo 2 in funzione del numero $n \geq 1$ di chiavi in esso contenute.

$$\log_{2t} \left(\frac{n+1}{2t} \right) \leq h \leq \log_t \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

↑ ↑

$$t=2$$

↑

$$\log_4 \left(\frac{n+1}{4} \right) \leq h \leq \log_2 \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

ESERCIZIO 2.

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo di *nod*i che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo t .

Livello	# nodi
0	1 = $(2t)^0$
1	$2t$
2	$(2t)^2$
3	$(2t)^3$
⋮	⋮
h	$(2t)^h$

$$\sum_{i=0}^h (2t)^i = \frac{(2t)^{h+1} - 1}{2t - 1}$$

ESERCIZIO 2.

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero minimo e il numero massimo di chiavi che possono essere contenute nelle foglie di un B-tree di grado minimo t avente altezza h .

$$2t^{h-1}(t-1) \leq f \leq (2t)^h(2t-1)$$

ESERCIZIO 1.

Si definisca la struttura dati dei B-tree e quindi si determini la minima altezza di un B-tree avente grado minimo t e contenente n nodi.

$$\underbrace{\lg_{2t} \left(\frac{n+1}{2t} \right)} \leq h \leq \lg_t \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

\Uparrow

$$\underbrace{\left\lceil \lg_{2t} \left(\frac{n+1}{2t} \right) \right\rceil} \leq h$$

ESERCIZIO 2.

Date le funzioni

$\text{min_key}(h, t) =_{Def}$ minimo numero di chiavi in un B -tree di grado minimo t e altezza h
 $\text{max_key}(h, t) =_{Def}$ massimo numero di chiavi in un B -tree di grado minimo t e altezza h ,

(a) si espliciti la funzione

$$q(h, t) =_{Def} \frac{\text{max_key}(h, t) + 1}{\text{min_key}(h, t) + 1}$$

in funzione di h e di t ;

(b) quindi, sapendo che il grado minimo t di un dato B -tree di altezza h è dispari e che $q(h, t) = 48128$, si determini h ;

(c) infine, si definisca in maniera precisa la struttura dati B -tree.

$$\begin{cases} \text{max_key}(h, t) = (2t)^{h+1} - 1 \\ \text{min_key}(h, t) = 2t^h - 1 \end{cases}$$

$$q(h, t) = \frac{(2t)^{h+1}}{2t^h} = 2^h t$$

t dispari

$$q(h, t) = 48128$$

$$2^h t = 48128$$

48128	2	-
24064	2	-
12032	2	-
6016	2	-
3008	2	-
1504	2	-
752	2	-
376	2	-
188	2	-
94	2	-
47		

$$t = 47$$
$$h = 10$$

ESERCIZIO 3.

- (a) Si definisca in maniera precisa la struttura dati dei B -tree. ✓
- (b) Sia \mathcal{T}_k un B -tree in cui ciascun nodo contiene esattamente k chiavi ($k \geq 1$). Si determini per quanti e per quali valori di t (in funzione di k) l'albero \mathcal{T}_k possa essere considerato un B -tree di grado minimo t .
- (c) Si generalizzi il risultato precedente al caso di un generico B -tree i cui ℓ nodi (con l'esclusione della radice) contengono un numero di chiavi rispettivamente pari a k_1, k_2, \dots, k_ℓ .

$$t-1 \leq k \leq 2t-1$$

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \leq t \leq k+1$$

$$k+1 \leq 2t$$

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \leq t$$

$$(k+1) - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + 1$$

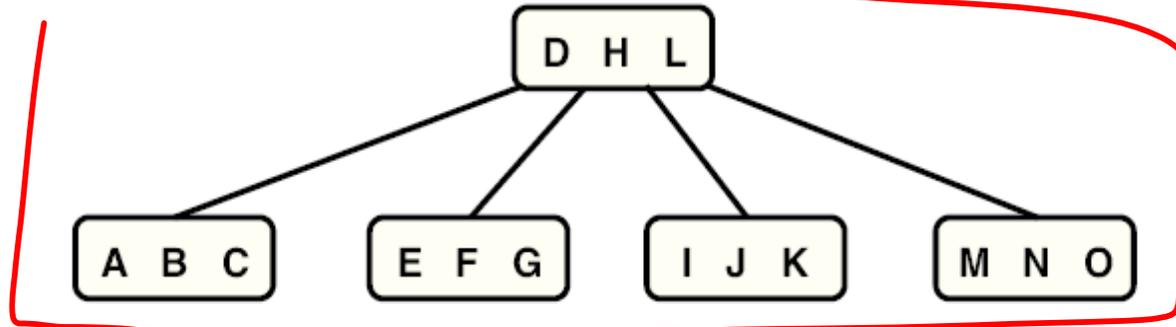
$$\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor = s$$

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + 1 \quad \left\lfloor \frac{k+3}{2} \right\rfloor$$

$$s - \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$$

ESERCIZIO 1.

- (a) Si definisca la struttura dati B-tree.
(b) Si determinino i valori $50 < n < 3000$ per cui esiste un B-tree di grado minimo 2, altezza h , contenente n chiavi, ma non esiste alcun B-tree di grado minimo 2, medesima altezza h , contenente $n - 1$ chiavi, ove $h > 5$.
(c) Si illustri la cancellazione delle chiavi B,A,C,D (nell'ordine dato) dal seguente B-tree di grado minimo 2:



$$\begin{cases} n = 2^{h+1} - 1 \\ h > 5 \\ 50 < n < 3000 \end{cases}$$

h	n
6	127
7	255
8	511
9	1023
10	2047