Si **definiscano** gli alberi e gli heap binomiali e si **forniscano** una minorazione ed una maggiorazione al numero di alberi binomiali in un heap binomiale con n nodi.

B_k in $H \longrightarrow 2^k \leq n \longrightarrow k \leq \lfloor \lg n \rfloor$

Quindi il numero di alberi binomiali in H è $\leq \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Per quanto riguarda la minorazione, esso è ≥ 1.

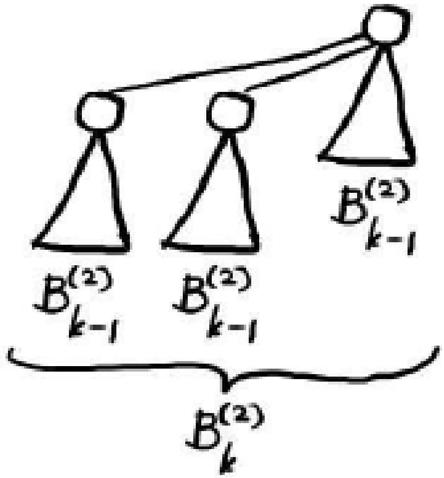
Si **definiscano** gli heap binomiali e si fornisca una **maggiorazione** al grado massimo di un nodo in un heap binomiale con n nodi.

B_k in H $\longrightarrow$ $2^k \leq n$ $\rightarrow$ $k \leq \lfloor \lg n \rfloor$.

Per un lemma visto a lezione, ogni nodo in H avrà grado $\leq \lfloor \lg n \rfloor$.

Un *albero binomiale* $B_k^{(2)}$ *di ordine 2* (in breve, albero 2-binomiale) è un albero ordinato definito ricorsivamente come segue:

- l'albero 2-binomiale $B_0^{(2)}$ è formato da un *solo* nodo;
- l'albero 2-binomiale $B_k^{(2)}$, per $k \geq 1$, è formato da tre alberi 2-binomiali $B_{k-1}^{(2)}$ collegati insieme in modo tale che le radici di due alberi 2-binomiali risultino i due figli più a sinistra della radice del terzo albero (si veda la figura).



(a) Si enuncino e si dimostrino le principali proprietà degli alberi 2-binomiali in analogia a quanto visto per gli alberi binomiali.
(In particolare, per quanto riguarda il conteggio del numero $D(k,i)$ di nodi a profondità i nell'albero 2-binomiale $B_k^{(2)}$, si dimostri che $D(k,i)$ è uguale al coefficiente del monomio $x^i y^{k-i}$ nell'espansione del polinomio $(2x+y)^k$.)

(b) Si proponga una definizione di *heap 2-binomiali*.

(a) $B_k^{(2)}$ ha 3^k nodi

(b) l'altezza di $B_k^{(2)}$ è k

(c) l'albero $B_k^{(2)}$ ha $2^i \binom{k}{i}$ nodi a profondità i

(d) il grado della radice di $B_k^{(2)}$ è uguale a $2k$ ed inoltre ogni altro nodo ha grado (pari) $< 2k$. Inoltre i figli della radice di $B_k^{(2)}$ sono radici di $B_{k-1}^{(2)}, B_{k-1}^{(2)}, \dots, B_1^{(2)}, B_1^{(2)}, B_0^{(2)}, B_0^{(2)}$ nell'ordine dato.