Dato $n \in \mathbb{N}$, si consideri il grafo orientato $G = (V, E)$, ove

$$\begin{aligned} V &= \{v_{ab} : 1 \leq a, b \leq n \ \ (a, b \in \mathbb{N})\} \\ E &= \{(v_{ab}, v_{cd}) : v_{ab}, v_{cd} \in V,\ v_{ab} \neq v_{cd},\ a \leq c, b \leq d\}\,. \end{aligned}$$

(a) Siano $w_1 : E \to \mathbb{R}$ e $w_2 : E \to \mathbb{R}^+$ due funzioni peso assegnate. Per ciascuno dei grafi pesati (G, w_1) e (G, w_2) si **illustri** un algoritmo per calcolare in maniera efficiente tutti i cammini minimi dal nodo v_{11}, **giustificando** opportunamente la scelta effettuata, e se ne **valuti** la complessità computazionale in funzione di $|V|$ e di $|E|$.

(b) Sapreste **esprimere** le complessità trovate nel punto precedente solo in funzione di n?

ESERCIZIO 4 (esame completo/II prova in itinere)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

(a) Si definiscano il *grafo* G'_s *dei cammini minimi da* s *in* G e la nozione di *albero dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo dei cammini minimi se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

(c) Si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo dei cammini minimi da s per il grafo pesato (G, w).

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, $q \in V$ un nodo assegnato di G e $w : E \to \mathbb{R}^+$ una funzione peso in G a valori positivi.

Un q-*cammino* in G da u a v è un cammino in G da u a v passante per q.

Un q-cammino in G da u a v si dice *minimo* se il suo peso è minimo (relativamente alla funzione peso w) rispetto a tutti i q-cammini in G da u a v.

Si descriva un algoritmo efficiente che calcoli per ciascuna coppia di nodi $(u, v) \in V \times V$ un q-cammino minimo da u a v e se ne valuti la complessità computazionale.

In analogia con la nozione di *distanza* (minima) tra due nodi, si proponga una definizione della nozione di *distanza massima* tra due nodi in un grafo orientato pesato.

Quindi si descriva un algoritmo per determinare le distanze massime di tutti i nodi da una data sorgente $s \in V$ in un grafo orientato aciclico $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}$ e se ne valuti la complessità computazionale.

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso non negativa $w : E \to \mathbb{R}^+_0$ e siano assegnati in G tre nodi distinti $s, q_1, q_2 \in V$.
Si descriva un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale, per calcolare tutti i cammini minimi (non necessariamente semplici) da s a ciascun nodo v di G, passanti per *almeno* uno dei due nodi assegnati q_1, q_2.

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso non negativa $w : E \to \mathbb{R}^+$ e siano assegnati $(k + 2)$ nodi distinti $s, t, v_1, v_2, \ldots, v_k$ di G.
Si descriva un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale in funzione di $|V|$, $|E|$ e k, per calcolare un cammino minimo (non necessariamente semplice) da s a t, passante per *almeno* uno dei k nodi assegnati $v_1, v_2, \ldots, v_k$.