Dato $n \in \mathbb{N}$, si consideri il grafo orientato $G = (V, E)$, ove

$$\begin{aligned} V &= \{v_{ab} : 1 \le a, b \le n \ \ (a, b \in \mathbb{N})\} \\ E &= \{(v_{ab}, v_{cd}) : v_{ab}, v_{cd} \in V,\ v_{ab} \ne v_{cd},\ a \le c,\ b \le d\}\,. \end{aligned}$$

(a) Siano $w_1 : E \to \mathbb{R}$ e $w_2 : E \to \mathbb{R}^+$ due funzioni peso assegnate. Per ciascuno dei grafi pesati (G, w_1) e (G, w_2) si **illustri** un algoritmo per calcolare in maniera efficiente tutti i cammini minimi dal nodo v_{11}, **giustificando** opportunamente la scelta effettuata, e se ne **valuti** la complessità computazionale in funzione di $|V|$ e di $|E|$.

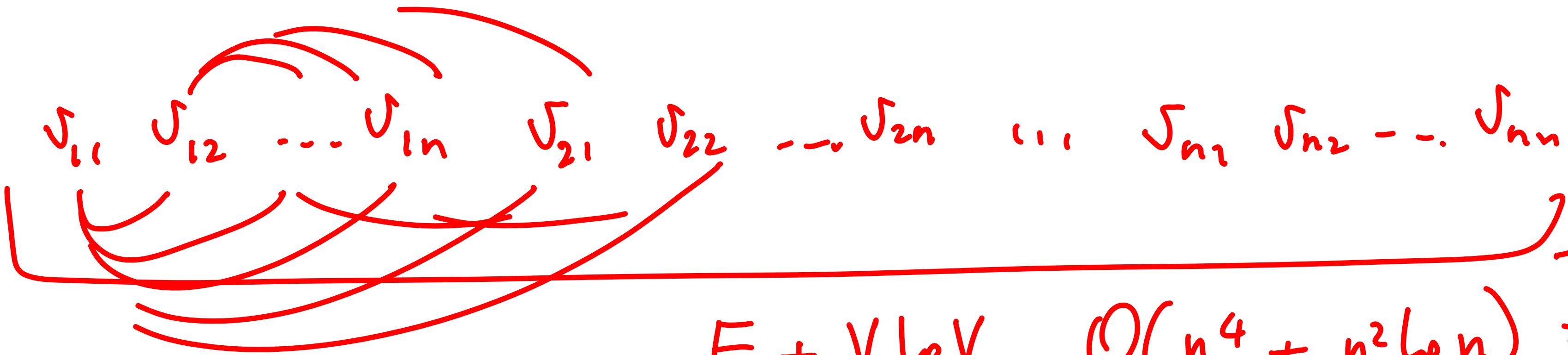
(b) Sapreste **esprimere** le complessità trovate nel punto precedente solo in funzione di n?

$n^2 - 1$

$n^2 - 2$

$\vdots$

1



$E + V \lg V \qquad O(n^4 + n^2 \lg n) = O(n^4)$

$O(V + E)$

$\Downarrow$

$O(n^2 + ?)$

$v_{a_1 b_1} \to v_{a_2 b_2} \to \dots \to v_{a_k b_k} \to v_{a_1 b_1}$

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \le a_1 \to a_i = a_1$

$b_1 \le b_2 \le \dots \le b_k \le b_1 \to b_i = b_1$

$v_{a_1 b_1}$

$|V| = n^2 \quad |E| = O(n^4)$

ESERCIZIO 4 (esame completo/II prova in itinere)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

(a) Si definiscano il *grafo* G'_s *dei cammini minimi da* s *in* G e la nozione di *albero dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo dei cammini minimi se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

(c) Si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo dei cammini minimi da s per il grafo pesato (G, w).

Si calcoli $\delta(s,v)\ \forall v$ mediante una chiamata a Dijkstra(G, s, w)

$$\underline{w(\pi)} = w(\pi_{su}) + w(u,v) = \delta(s,u) + w(u,v) = \underline{\delta(s,v)}$$

$\delta :=$ Dijkstra(G, s, w) $\quad O(E + V\lg V)$

$E'_s := \emptyset$

<u>for</u> $(u,v) \in E$ <u>do</u>

  <u>if</u> $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$ <u>then</u>

    $E'_s := E'_s \cup \{(u,v)\}$ $\quad O(E)$ $\quad \Longrightarrow (u,v) \in E'_s$

<u>return</u> (V, E'_s)

$O(E + V\lg V)$

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, $q \in V$ un nodo assegnato di G e $w : E \to \mathbb{R}^+$ una funzione peso in G a valori positivi.

Un q-*cammino* in G da u a v è un cammino in G da u a v passante per q.

Un q-cammino in G da u a v si dice *minimo* se il suo peso è minimo (relativamente alla funzione peso w) rispetto a tutti i q-cammini in G da u a v.

Si descriva un algoritmo efficiente che calcoli per ciascuna coppia di nodi $(u, v) \in V \times V$ un q-cammino minimo da u a v e se ne valuti la complessità computazionale.

q-cammino

In analogia con la nozione di *distanza* (minima) tra due nodi, si proponga una definizione della nozione di *distanza massima* tra due nodi in un grafo orientato pesato.

Quindi si descriva un algoritmo per determinare le distanze massime di tutti i nodi da una data sorgente $s \in V$ in un grafo orientato aciclico $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}$ e se ne valuti la complessità computazionale.

$$D(u,v) =_{def} \sup \{ W(\pi) : \pi \in PATHS(G; u, v) \}$$

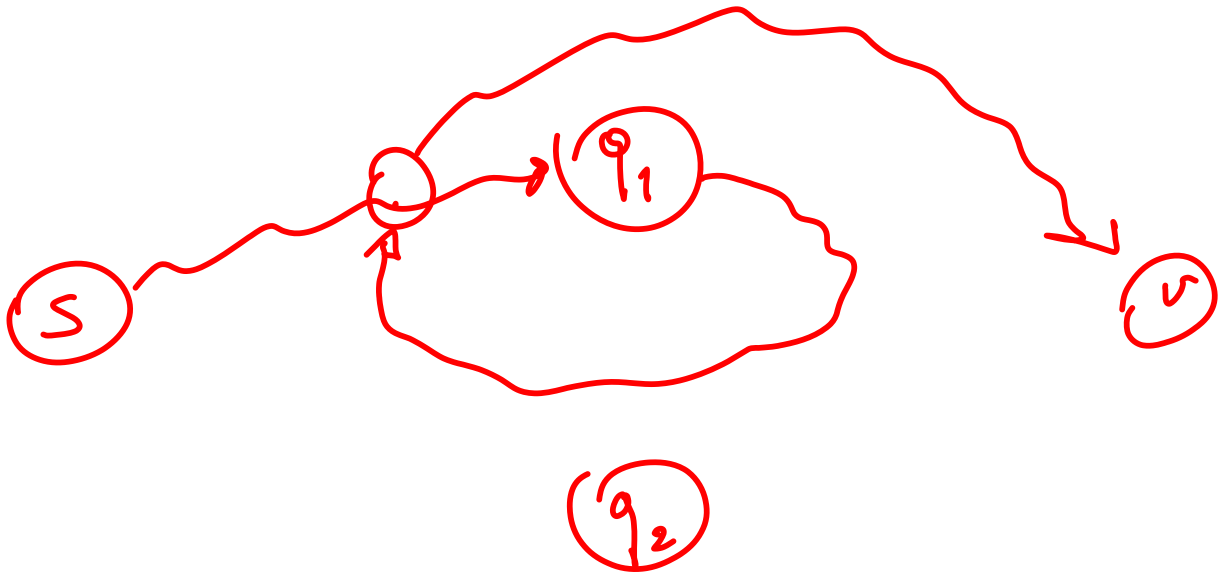
Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso non negativa $w : E \to \mathbb{R}^+_0$ e siano assegnati in G tre nodi distinti $s, q_1, q_2 \in V$.
Si descriva un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale, per calcolare tutti i cammini minimi (non necessariamente semplici) da s a ciascun nodo v di G, passanti per *almeno* uno dei due nodi assegnati q_1, q_2.

$\delta(s, q_1)$

$\delta(s, q_2)$

$\delta(q_1, v)$

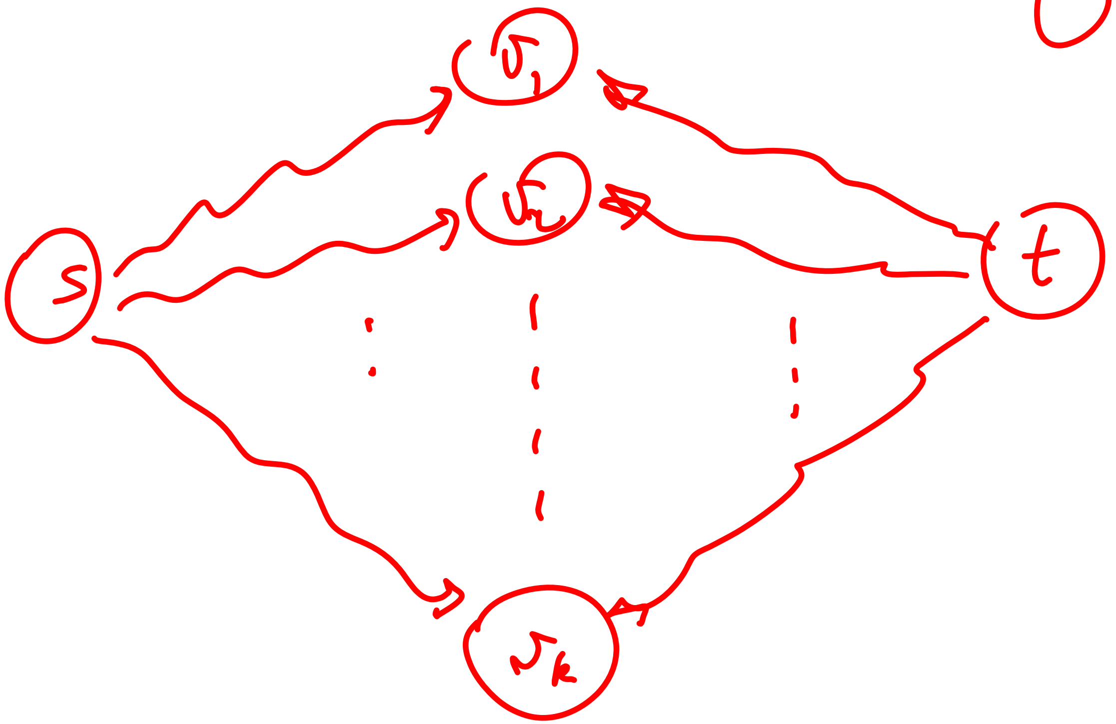
$\delta(q_2, v)$



$$\min\{\delta(s, q_1) + \delta(q_1, v),\ \delta(s, q_2) + \delta(q_2, v)\}$$

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con una funzione peso non negativa $w : E \to \mathbb{R}^+$ e siano assegnati $(k + 2)$ nodi distinti $s, t, v_1, v_2, \ldots, v_k$ di G.
Si descriva un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale in funzione di $|V|$, $|E|$ e k, per calcolare un cammino minimo (non necessariamente semplice) da s a t, passante per *almeno* uno dei k nodi assegnati $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

$O(k + |E| + |V| \lg |V|)$



s
v_1
$\vdots$
v_k

$$\min\{\delta(s, v_i) + \delta(v_i, t) \; : \; i = 1, \ldots, k\} \to O(k)$$