ALGORITMI PER IL CALCOLO DELLE DISTANZE E DEI CAMMINI MINIMI DA UNA DATA SORGENTE

- DESCRIVEREMO ALGORITMI BASATI SULLA TECNICA LABEL CORRECTING
- IN PRATICA, DATO UN GRAFO $G=(V,E)$, CON FUNZIONE PESO $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ E SORGENTE s, VIENE MANTENUTA UNA FUNZIONE $d: V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (STIMA DELLA DISTANZA) IN MODO TALE CHE VALGA SEMPRE $d \geq \delta_{G_s}$, CIOE'
  $d[v] \geq \delta_{G_s}(v) = \delta_G(s,v)$, PER OGNI $v \in V$,
  E CHE ALLA FINE DELLA COMPUTAZIONE VALGA
  $d = \delta_{G_s}$, CIOE' $d[v] = \delta_{G_s}(v)$, PER OGNI $v \in V$.

INIZIALIZZAZIONE

- QUAL E' LA MIGLIORE STIMA DI d CHE POSSIAMO FARE INIZIALMENTE, PRIMA ANCORA DI CONSULTARE LA FUNZIONE w?
- E CHE COSA SI PUÒ DIRE INIZIALMENTE DELL' ALBERO DEI CAMMINI MINIMI ?

INIZIALIZZAZIONE

- QUAL E' LA MIGLIORE STIMA DI d CHE POSSIAMO FARE INIZIALMENTE, PRIMA ANCORA DI CONSULTARE LA FUNZIONE w?

RISPOSTA

$d[s] := 0$

$d[v] := +\infty$, PER OGNI $v \in V \setminus \{s\}$

- OVVIAMENTE, IN TAL CASO VALE $d \geqslant \delta_{G_s}$

- L'ALBERO DEI CAMMINI MINIMI, RAPPRESENTATO IMPLICITAMENTE MEDIANTE UN ARRAY Pred, PUÒ ESSERE COSTRUITO CONTESTUALMENTE AL CALCOLO DELLA DISTANZA δ_{G_s}

INIZIALMENTE BASTERÀ PORRE:

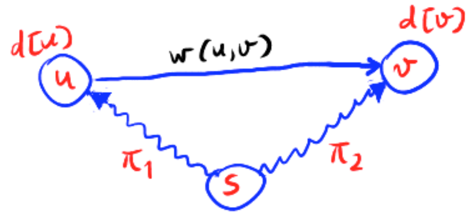
$Pred[v] :=$ NIL, PER OGNI $v \in V$

```
procedure Initialize-Single-Source(G, s)
   for v ∈ V[G] do
       d[v] := +∞
       Pred[v] := NIL
   d[s] := 0
```

AGGIORNAMENTO DELLE FUNZIONI d E $Pred$

- SUPPONIAMO CHE $d \geq \delta_{G_s}$ E CHE PER OGNI NODO $v \in V$ TALE CHE $d[v] \neq +\infty$ LA FUNZIONE $Pred$ CONSENTA DI COSTRUIRE UN CAMMINO DA s A v DI PESO $\leq d[v]$.
- E' POSSIBILE MIGLIORARE LA STIMA DI d MANTENENDO LA PROPRIETA' DELLA FUNZIONE $Pred$?
- SE G AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s LA RISPOSTA E' AFFERMATIVA.

- SI CONSIDERI LA SITUAZIONE



CON $w(\pi_1) \leq d[u]$ E $w(\pi_2) \leq d[v]$.

- SI OSSERVI CHE π_2 E $\pi_1' = \pi_1 ; (u,v)$ SONO DUE CAMMINI DISTINTI DA s A v, CON $w(\pi_1') \leq d[u] + w(u,v)$.
- QUINDI, SE $d[v] > d[u] + w(u,v)$ CONVERRA' PORRE:

  $d[v] := d[u] + w(u,v)$

  $Pred[v] := u$

NOTA: IL CAMMINO π_2 POTREBBE NON ESISTERE (SE $d[v] = +\infty$)

Procedure RELAX $(u,v;w)$

if $d[v] > d[u] + w(u,v)$ **then**

$d[v] := d[u] + w(u,v)$

$Pred[v] := u$

ALGORITMO GENERIC SINGLE-SOURCE SHORTEST-PATH

Procedure GSSSP(G, s, w)

Initialize-Single-Source (G, s)

while $\exists\ (u,v) \in E[G]$ TALE CHE $d[u]+w(u,v) < d[v]$ **do**

- sia (u,v) tale che $d[u]+w(u,v) < d[v]$

RELAX $(u,v;w)$

LEMMA DURANTE L'ESECUZIONE DI GSSSP(G,s,w), SI HA:

(a) LA FUNZIONE d DECRESCE MONOTONICAMENTE

(b) VALE SEMPRE $d \geq \delta_{G_s}$

(ANCHE IN ASSENZA DI CAMMINI MINIMI DA s)

DIM. LA (a) SEGUE IMMEDIATAMENTE PER INDUZIONE.
PER QUANTO RIGUARDA LA (b), OSSERVIAMO CHE IMMEDIATAMENTE DOPO L'INIZIALIZZAZIONE VALE $d \geq \delta_{G_s}$.
PER ASSURDO, SIA RELAX$(u,v;w)$ LA PRIMA CHIAMATA A RELAX DOPO LA QUALE $d \ngeq \delta_{G_s}$ (E QUINDI SI ABBIA $d[v] < \delta_{G_s}(v)$).
SI HA:

- $+\infty > d[u] \geq \delta_{G_s}(u)$, PER CUI ESISTE UN CAMMINO π DA s A u IN G TALE CHE $w(\pi) \leq d[u]$
- $d[v] = d[u] + w(u,v) \geq w(\pi) + w(u,v) = w(\pi;(u,v)) \geq \delta_{G_s}(v)$, IN QUANTO $\pi;(u,v)$ E' UN CAMMINO DA s A v. ASSURDO. ■

– SIA $d : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ TALE CHE $d \geq \delta_{G_s}$ E $d[s] \leq 0$

– SI PONGA

$$\mathcal{P}_d = \{\pi \in PATHS(G;s) : d[tail(\pi)] > w(\pi)\}$$

LEMMA LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI.

(a) $\mathcal{P}_d = \emptyset$

(b) $(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v)$

(c) $d = \delta_{G_s}$

DIM (a) $\Rightarrow$ (b)

SIA $\mathcal{P}_d = \emptyset$, MA SUPPONIAMO CHE ESISTA $(u,v) \in E$ TALE CHE $d[v] > d[u] + w(u,v)$.

POICHE' $\delta_{G_s}(u) \leq d[u] < +\infty$, ESISTE $\pi_{su} \in PATHS(G;s,u)$ TALE CHE $w(\pi_{su}) \leq d[u]$.

SIA $\pi_{sv} := \pi_{su};(u,v) \in PATHS(G;s,v)$.

ALLORA $d[v] > d[u] + w(u,v) \geq w(\pi_{su}) + w(u,v) = w(\pi_{sv})$

E QUINDI $\pi_{sv} \in \mathcal{P}_d$, CIOE' $\mathcal{P}_d \neq 0$, ASSURDO.

$$\mathcal{P}_d = \{\pi \in PATHS(G;s) : d[tail(\pi)] > w(\pi)\}$$

LEMMA LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI.

(a) $\mathcal{P}_d = \emptyset$

(b) $(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v)$

(c) $d = \delta_{G_s}$

DIM (b) $\Rightarrow$ (a)

SUPPONIAMO CHE $(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v)$.

SE $\mathcal{P}_d \neq \emptyset$, SI SELEZIONI $\pi \in \mathcal{P}_d$ DI LUNGHEZZA MINIMA.

SI HA: $length(\pi) > 0$, IN QUANTO ALTRIMENTI SI AVREBBE $\pi = (s)$, $0 \geq d[s] > w(\pi) = 0$, ASSURDO.

SIA $\pi := (v_0, v_1, \dots, v_k)$, CON $v_0 = s$ E $k \geq 1$

(QUINDI: $d[v_k] > w(\pi)$) E SI CONSIDERI $\pi' := (v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$.

PER LA MINIMALITA' DI $length(\pi)$, VALE $\pi' \notin \mathcal{P}_d$, DA CUI:

$d[v_{k-1}] \leq w(\pi')$.

PERTANTO: $d[v_k] > w(\pi) = w(\pi') + w(v_{k-1}, v_k) \geq d[v_{k-1}] + w(v_{k-1}, v_k)$,

ASSURDO.

$$\mathcal{P}_d = \{\pi \in PATHS(G;s) : d[tail(\pi)] > w(\pi)\}$$

LEMMA LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI.

(a) $\mathcal{P}_d = \emptyset$

(b) $(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v)$

(c) $d = \delta_{G_s}$

DIM $(a) \Rightarrow (c)$.

SIA $\mathcal{P}_d = \emptyset$, MA $d \neq \delta_{G_s}$.
ALLORA ESISTE $v \in V$ TALE CHE $d[v] > \delta_{G_s}(v)$ E QUINDI UN CAMMINO $\pi_{sv} \in PATHS(G;s,v)$ TALE CHE $d[v] > w(\pi_{sv})$. PERTANTO $\pi_{sv} \in \mathcal{P}_d \neq \emptyset$, ASSURDO.

$(c) \Rightarrow (a)$

SUPPONIAMO CHE $d = \delta_{G_s}$, MA $\mathcal{P}_d \neq \emptyset$.
SIA $\pi \in \mathcal{P}_d$. ALLORA $d[tail(\pi)] > w(\pi) \geq \delta_{G_s}(tail(\pi))$,
E QUINDI $d \neq \delta_{G_s}$, ASSURDO. ■

LEMMA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÈ L'ESECUZIONE DI $GSSSP(G,s,w)$ TERMINI È CHE $d = \delta_{G_s}$.

DIM. (NECESSITÀ) SE $GSSSP(G,s,w)$ SI FERMA, ALLORA VALE $(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v)$, DA CUI PER IL LEMMA PRECEDENTE SI HA $d = \delta_{G_s}$.

(SUFFICIENZA) SE NEL CORSO DELL'ESECUZIONE DI $GSSSP(G,s,w)$ VALE $d = \delta_{G_s}$, ALLORA, PER IL LEMMA PRECEDENTE, SI HA

$$(\forall (u,v) \in E)\ d[v] \leq d[u] + w(u,v),$$

DA CUI LA TERMINAZIONE DI $GSSSP(G,s,w)$. ■

LEMMA SUPPONIAMO CHE (G,w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE s.
SIANO $d : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ E $Pred : V \to V \cup \{NIL\}$ E SIA
$T = (V_T, E_T)$ IL GRAFO INDOTTO DA $Pred$, CON
$V_T = \{x \in V : d[x] \neq +\infty\}$ E $E_T = \{(Pred[x], x) : x \in V_T \setminus \{s\}\}$.
SUPPONIAMO CHE
(1) T SIA UN ALBERO RADICATO IN s
(2) PER OGNI $x, y \in V_T$ TALI CHE y SIA RAGGIUNGIBILE DA x IN T SI ABBIA $d[x] + w(T_{xy}) \leq d[y]$
(DOVE T_{xy} E' IL CAMMINO IN T DA x A y)
ALLORA, PER OGNI ARCO (u,v) DI G, DOPO L'ESECUZIONE DI RELAX$(u,v;w)$ LE PROPRIETA' (1) E (2) CONTINUANO A VALERE PER IL NUOVO GRAFO INDOTTO DA $Pred$.

DIM. DOPO L'ESECUZIONE DI RELAX$(u,v;w)$, INDICHIAMO CON

- d' IL NUOVO VALORE DELLA FUNZIONE d
- $Pred'$ IL NUOVO VALORE DELLA FUNZIONE $Pred$

• SE $d[v] \leq d[u] + w(u,v)$, ALLORA: $d' = d$, $Pred' = Pred$ E QUINDI IL LEMMA E' BANALMENTE VERO.

• SUPPONIAMO CHE $d[v] > d[u] + w(u,v)$, COSICCHE' SI HA:

- $d'[v] = d[u] + w(u,v)$ E $d'[z] = d[z]$, PER OGNI $z \neq v$
- $Pred'[v] = u$ E $Pred'[z] = Pred[z]$, PER OGNI $z \neq v$

• SIA T' IL GRAFO INDOTTO DA $Pred'$.

• SIA T_{su} IL CAMMINO DA s AD u NELL'ALBERO T INDOTTO DA $Pred$.

./.

(1) SE T' NON FOSSE UN ALBERO RADICATO IN s, ALLORA v OCCORREREBBE NECESSARIAMENTE SU T_{su} E SI AVREBBE:

$$d[v] + w(T_{vu}) \leq d[u]$$

$$d[v] + w(T_{vu}) + w(u,v) \leq d[u] + w(u,v)$$

$$w(T_{vu}) + w(u,v) \leq d[u] + w(u,v) - d[v] < 0$$

CIOE' $T_{vu}; (u,v)$ SAREBBE UN CICLO DI PESO NEGATIVO RAGGIUNGIBILE DA s E QUINDI (G,w) NON AMMETTEREBBE CAMMINI MINIMI DA s, ASSURDO.

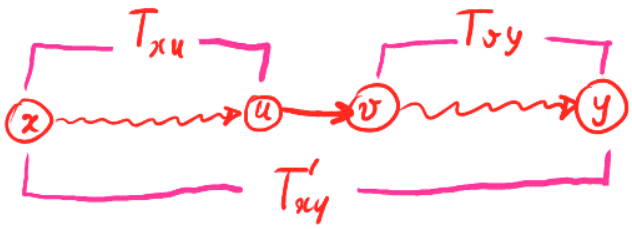
PERTANTO T' E' UN ALBERO RADICATO IN s.

./.

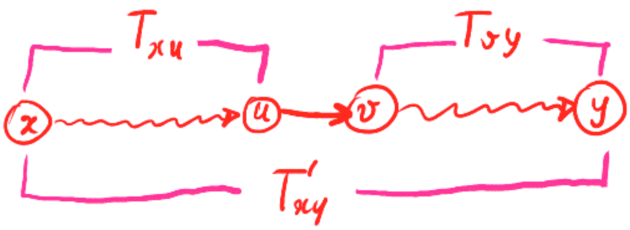
(2) E' SUFFICIENTE VERIFICARE LA PROPRIETA' (2) SOLTANTO PER TUTTE LE COPPIE $x, y \in V$ TALI CHE

- $x \neq v$
- v OCCORRE SUL CAMMINO T'_{xy} DA x A y IN T'

SIANO QUINDI T'_{xy}, T_{xu}, T_{vy} COME IN FIGURA



./.



SI HA:

$$
\begin{aligned}
d'[x] + w(T'_{xy}) &= d[x] + w(T_{xu}) + w(u,v) + w(T_{vy}) \\
&\leq d[u] + w(u,v) + w(T_{vy}) \\
&= d'[v] + w(T_{vy})
\end{aligned}
$$

- SE $y = v$, $d'[v] + w(T_{vy}) = d'[v] = d'[y]$,
- SE $y \neq v$, $d'[v] + w(T_{vy}) < d[v] + w(T_{vy}) \leq d[y] = d'[y]$.

IN OGNI CASO SI HA: $d'[v] + w(T_{vy}) \leq d'[y]$, E QUINDI:

$d'[x] + w(T'_{xy}) \leq d'[y]$. ∎

COROLLARIO NELLE IPOTESI CHE (G,w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA UNA DATA SORGENTE s, LE PROPRIETA' (1) E (2) DEL LEMMA PRECEDENTE SONO SODDISFATTE DURANTE OGNI ESECUZIONE DELLA PROCEDURA $GSSSP(G,s,w)$ (ED IN PARTICOLARE ALLA FINE, NEI CASI IN CUI $GSSSP(G,s,w)$ SIA TERMINANTE). ■

COROLLARIO SE $GSSSP(G,s,w)$ TERMINA, $d=\delta_{G_s}$ E L'ALBERO T INDOTTO DALLA FUNZIONE $Pred$ E' UN ALBERO DI CAMMINI MINIMI IN (G,w) DA s.

DIM.

- SIA x UN NODO RAGGIUNGIBILE DA s IN G.
- SIA T_{sx} IL CAMMINO DA s A x NELL'ALBERO T
- PER LA (2) DEL LEMMA PRECEDENTE SI HA:

$$\delta_{G_s}(x) \leq w(T_{sx}) = d[s] + w(T_{sx}) \leq d[x] = \delta_{G_s}(x),$$

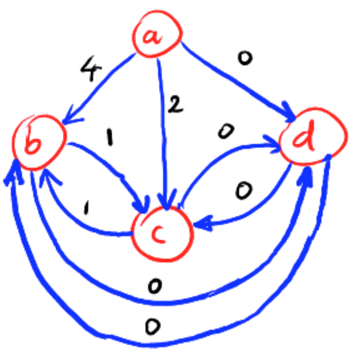
DA CUI $w(T_{sx}) = \delta_{G_s}(x)$,

CIOE' IL CAMMINO T_{sx} DA s A x E' MINIMO

E QUINDI T E' UN ALBERO DI CAMMINI MINIMI. ■

LEMMA SE (G,w) AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s, ALLORA L'ESECUZIONE DI $GSSSP(G,s,w)$ TERMINA DOPO AL PIÙ $e(V[G]-1)!$ PASSI. ■

ES. SI CONSIDERI IL SEGUENTE GRAFO:



RELAX(a, b; w)
RELAX(b, c; w)
RELAX(c, d; w)
RELAX(b, d; w)
RELAX(d, c; w)
RELAX(a, c; w)
RELAX(c, b; w)
RELAX(b, d; w)
RELAX(c, d; w)
RELAX(d, b; w)
RELAX(a, d; w)
RELAX(d, b; w)
RELAX(b, c; w)
RELAX(d, c; w)

OTTIMIZZAZIONI DI GSSSP

LEMMA SE $\pi : \overbrace{s \rightsquigarrow u}^{\pi_{su}} \to v$ E' UN CAMMINO MINIMO DA s A v IN (G,w) E AD UN CERTO PUNTO DI UN'ESECUZIONE DI $GSSSP(G,w,s)$ VALE $d[u] = \delta_{G_s}(u)$, ALLORA DOPO L'ESECUZIONE DI $RELAX(u,v;w)$ VARRA' $d[v] = \delta_{G_s}(v)$.

DIM. INFATTI DOPO LA CHIAMATA A $RELAX(u,v;w)$ SI AVRA':

$$\delta_{G_s}(v) \leq d[v] \leq d[u] + w(u,v) = \delta_{G_s}(u) + w(u,v) = w(\pi_{su}) + w(u,v)$$
$$= w(\pi) = \delta_{G_s}(v),$$

DA CUI $d[v] = \delta_{G_s}(v)$. ■

- PERCIO', SE SI ACCERTA CHE $d[u] = \delta_{G_s}(u)$, PER QUALCHE $u \in V[G]$, CONVERRA' CHIAMARE $RELAX(u,v;w)$ PER OGNI $v \in Adj_G[u]$.

```
Procedure SCAN(u; G, w)
    for v ∈ Adj_G[u] do
        RELAX(u, v; w)
```

• NELL' IPOTESI CHE ESISTANO CAMMINI MINIMI DA s IN (G,w) CONVERRA' UTILIZZARE LA SEGUENTE VARIANTE OTTIMIZZATA DI GSSSP.

Procedure OGSSSP(G,s,w)

Initialize-Single-Source(G,s)

$S:=\emptyset$ // rappresenta l'insieme dei nodi x per cui e' stato
// accertato che vale $d[x]=\delta_{G_s}[x]$

while $\exists\, v\in V[G]\setminus S$ tale che $d[v]=\delta_{G_s}[v]$ **do**

- sia $v\in V[G]\setminus S$ tale che $d[v]=\delta_{G_s}[v]$
  SCAN$(v;G,w)$
  $S:=S\cup\{v\}$

- PER LA CORRETTEZZA DI OGSSSP OCCORRE STABILIRE CHE AD OGNI ITERAZIONE DEL CICLO while VALGA:

$$V\setminus S\neq\emptyset \longrightarrow (\exists\, v\in V\setminus S)(d[v]=\delta_{G_s}(v))$$

- SIA $V\setminus S\neq\emptyset$ E SIA $u\in V\setminus S$.
  - SE $d[u]=\delta_{G_s}(u)$ ABBIAMO FINITO
  - SE $d[u]>\delta_{G_s}(u)$, SIA $\pi=(u_0,u_1,\dots,u_k)$, CON $u_0=s$ E $u_k=u$, UN CAMMINO MINIMO DA s AD u IN (G,w).
  - SIA $i_0=\min_j u_j\in V\setminus S$, ALLORA: $d[u_{i_0}]=\delta_{G_s}(u_{i_0})$.

  INFATTI:

  CASO $i_0=0$: $d[u_{i_0}]=d[s]=0=\delta_{G_s}(s)=\delta_{G_s}(u_{i_0})$

  CASO $i_0>0$: $u_{i_0-1}\in S$, QUINDI E' STATA ESEGUITA RELAX$(u_{i_0-1},u_{i_0};w)$ CON $d[u_{i_0-1}]=\delta_{G_s}(u_{i_0-1})$, PER CUI DOPO SI HA: $d[u_{i_0}]=\delta_{G_s}(u_{i_0})$. ■

- LA COMPLESSITA' DELLA PROCEDURA OGSSSP E' $O(V+E)$ PIÙ IL TEMPO NECESSARIO A SELEZIONARE AD OGNI ITERAZIONE DEL CICLO **while** UN NODO $v \in V \setminus S$ TALE CHE $d[v] = d_{G_S}(v)$

- QUINDI PER OTTENERE DA OGSSSP ALGORITMI EFFETTIVI, OCCORRE TROVARE IL MODO PIÙ EFFICIENTE PER EFFETTUARE TALI SELEZIONI

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI CASI:
  - CASO PIÙ GENERALE (ALGORITMO DI BELLMAN-FORD)
  - $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ (ALGORITMO DI DIJKSTRA)
  - G ACICLICO

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

- LA STRATEGIA PIÙ SEMPLICE PER SELEZIONARE IL NODO GIUSTO CONSISTE NEL ... SELEZIONARE AD OGNI CICLO TUTTI I POSSIBILI NODI !

```
Procedure Bellman-Ford(G, s, w)
   Initialize-Single-Source(G, s)
   for i := 1 to |V[G]| do
      for (u,v) ∈ E[G] do
         RELAX(u, v; w)
   [
      ⋮
   ]
```

FUNZIONA NELL'IPOTESI CHE (G, w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA s.

? COME VERIFICARE SE (G, w) AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s ?

ALGORITMO DI BELLMAN-FORD

- LA STRATEGIA PIÙ SEMPLICE PER SELEZIONARE IL NODO GIUSTO CONSISTE NEL ... SELEZIONARE AD OGNI CICLO TUTTI I POSSIBILI NODI!

```
Procedure Bellman-Ford (G, s, w)
    Initialize-Single-Source (G, s)
    for i := 1 to |V[G]| do
        for (u,v) ∈ E[G] do
            RELAX (u, v, w)
    for (u,v) ∈ E[G] do
        if d[v] > d[u] + w(u,v) then
            print ("cicli di peso negativo"); QUIT
```

COMPLESSITÀ:

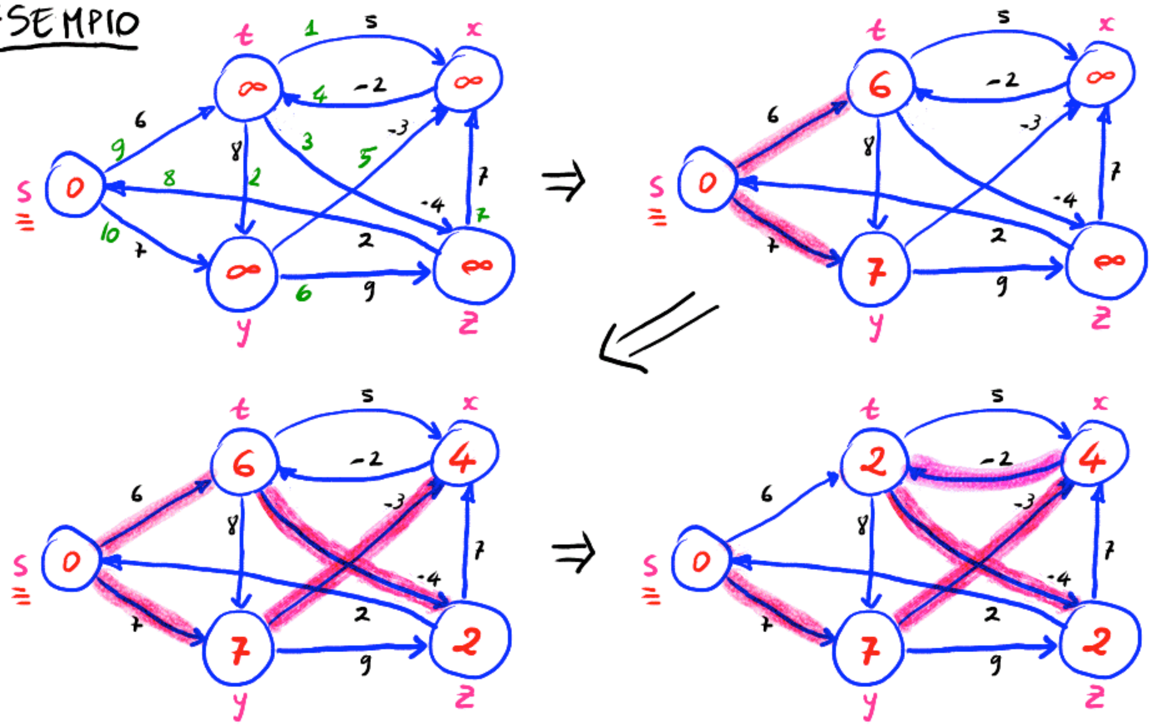
$O(V)$ +

$[O(V) \cdot O(E)]$

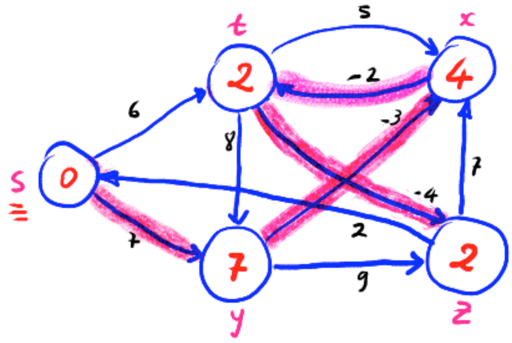
$O(E)$

$O(VE)$

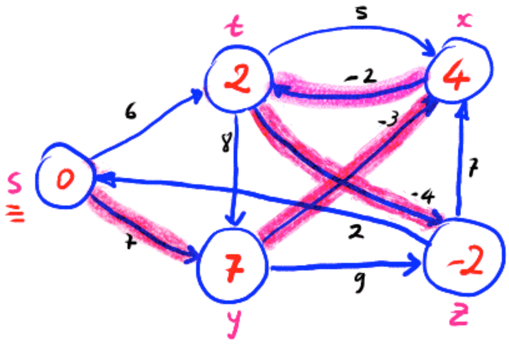
ESEMPIO



ESEMPIO (cntd)



$\Rightarrow$



ALGORITMO DI DIJKSTRA

- SUPPONIAMO CHE $w: E \to \mathbb{R}_0^+$ (CIOE' NON CI SONO ARCHI NEGATIVI)
- QUAL E' UN POSSIBILE CRITERIO EFFICIENTE PER SELEZIONARE $v \in V \setminus S$ TALE CHE $d[v] = \delta_{G_s}(v)$?

ALGORITMO DI DIJKSTRA

- SUPPONIAMO CHE $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ (CIOE' NON CI SONO ARCHI NEGATIVI)
- QUAL E' UN POSSIBILE CRITERIO EFFICIENTE PER SELEZIONARE $v \in V \setminus S$ TALE CHE $d[v] = \delta_{G_s}(v)$?

PROPRIETA': SE $v \in V \setminus S$ E' TALE CHE $d[v] = \min\{d[u] : u \in V \setminus S\}$ ALLORA $d[v] = \delta_{G_s}(v)$.

DIM. INFATTI, SE $d[v] > \delta_{G_s}(v)$, SIA $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, CON $v_0 = s$, $v_k = v$ UN CAMMINO MINIMO IN (G, w) DA s A v. SIA $i_0 = \min_j v_j \in V \setminus S$. ALLORA $d[v_{i_0}] = \delta_{G_s}(v_{i_0})$.

QUINDI $d[v] > \delta_{G_s}(v) = w(\pi) = w(v_0, v_1, \dots, v_{i_0}) + w(v_{i_0}, \dots, v_k)$

$$= \delta_{G_s}(v_{i_0}) + \sum_{j=i_0}^{k-1} w(v_j, v_{j+1}) \geq \delta_{G_s}(v_{i_0}) = d[v_{i_0}],$$

CONTRADDICENDO LA MINIMALITA' DI $d[v]$. ■

ALGORITMO DI DIJKSTRA

Procedure Dijkstra (G, s, w)

Initialize-Single-Source (G, s)

$S := \emptyset$

while $V[G] \setminus S \neq \emptyset$ **do**

- sia $v \in V[G] \setminus S$ tale che $d[v] = \min\{d[u] : u \in V \setminus S\}$

SCAN$(v; G, w)$

$S := S \cup \{v\}$

COME EFFETTUARE LA SELEZIONE DI v IN MANIERA EFFICIENTE ?

ALGORITMO DI DIJKSTRA

Procedure Dijkstra (G, s, w)
- Initialize-Single-Source (G, s)
- $Q :=$ make-queue $(V[G], d)$
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $v :=$ Extract-Min (Q, d)
  - SCAN $(v; G, w)$

COMPLESSITA'

$O(V) +$

$O(V) +$

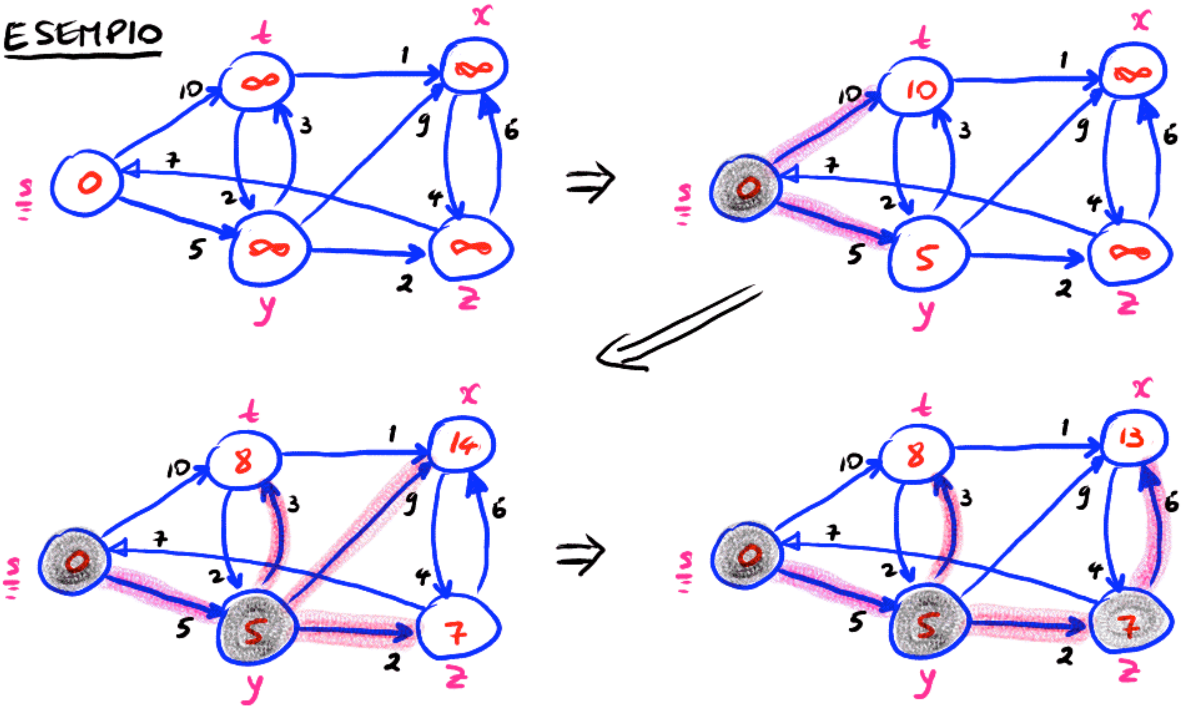
$[\,|V| \cdot \text{costo}(\text{Extract\_Min}) + |E| \cdot \text{costo}(\text{Decrease\_Key})\,]$

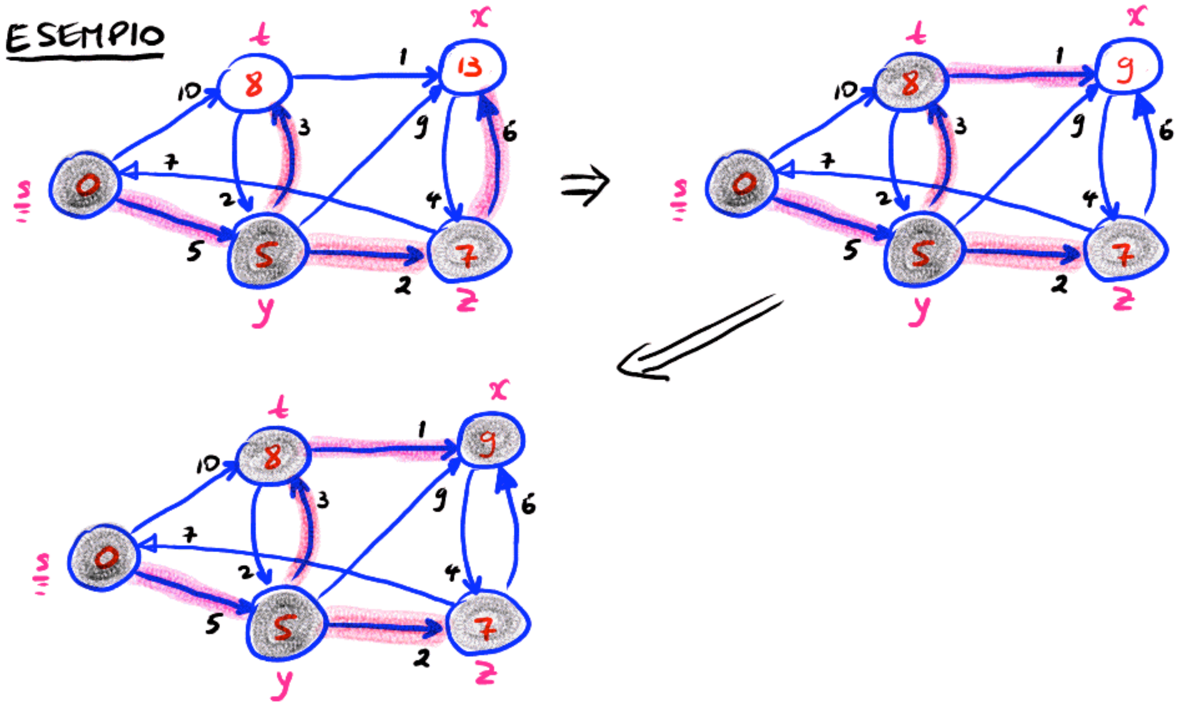
ALGORITMO DI DIJKSTRA

Procedure Dijkstra (G, s, w)
- Initialize-Single-Source (G, s)
- $Q :=$ make-queue $(V[G], d)$
- **while** $Q \neq \emptyset$ **do**
  - $v :=$ Extract-Min (Q, d)
  - SCAN $(v; G, w)$

DIVERSE IMPLEMENTAZIONI DELLA CODA Q

ARRAY	HEAP BINARIO	HEAP DI FIBONACCI
$O(V)$	$O(V)$	$O(V)$
$O(1)$	$O(V)$	$O(V)$
$O(V^2)$	$O(V \log V)$	$O(V \log V)$
$O(E)$	$O(E \log V)$	$O(E)$
$O(V^2)$	$O((V+E)\log V)$	$O(E + V\log V)$


ESEMPIO


ESEMPIO

CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE IN GRAFI ACICLICI

- SUPPONIAMO CHE G SIA ACICLICO.
- QUAL E' UN POSSIBILE CRITERIO EFFICIENTE PER SELEZIONARE $v \in V \setminus S$ TALE CHE $d[v] = \delta_{G_S}(v)$?

CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE IN GRAFI ACICLICI

- SUPPONIAMO CHE G SIA ACICLICO.
- QUAL E' UN POSSIBILE CRITERIO EFFICIENTE PER SELEZIONARE $v \in V \setminus S$ TALE CHE $d[v] = \delta_{G_S}(v)$?

PROPRIETA' SE TUTTI I PREDECESSORI IMMEDIATI DI $v \in V \setminus S$ SONO IN S, ALLORA $d[v] = \delta_{G_S}(v)$.

DIM. INFATTI, SE $d[v] > \delta_{G_S}(v)$, SIA $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, CON $v_0 = s$, $v_k = v$ UN CAMMINO MINIMO IN (G, w) DA s A v, SI HA $k \geq 1$, IN QUANTO $d[v_0] = d[s] = \delta_{G_S}(s) = 0$. POICHE' $v_{k-1} \in S$, $d[v_{k-1}] = \delta_{G_S}(v_{k-1})$. INOLTRE, SUBITO PRIMA DI INSERIRE v_{k-1} IN S VIENE ESEGUITA RELAX$(v_{k-1}, v_k; w)$, E QUINDI VALE $d[v] = d[v_k] = \delta_{G_S}(v_k) = \delta_{G_S}(v)$, ASSURDO. ■

CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE IN GRAFI ACICLICI

Procedure DAG-Shortest-Paths'(G, s, w)

  Initialize-Single-Source (G, s)
  $S := \emptyset$
  while $V[G] \setminus S \neq \emptyset$ **do**
    sia $v \in V[G] \setminus S$ tale che tutti i predecessori di v stiano in S
    SCAN$(v; G, w)$
    $S := S \cup \{v\}$

COME SELEZIONARE v IN MANIERA EFFICIENTE ?

CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE IN GRAFI ACICLICI

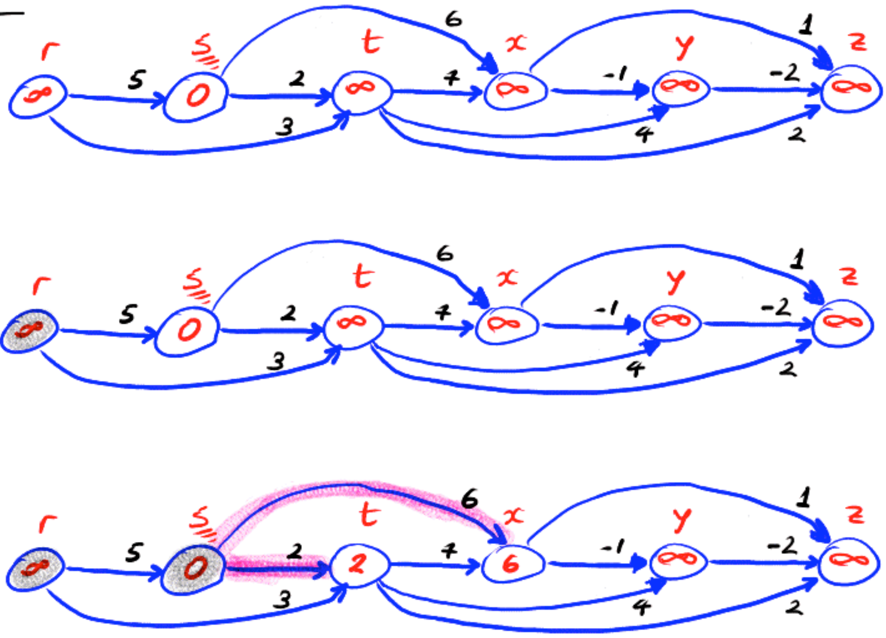
COMPLESSITA'

Procedure DAG-Shortest-Paths(G, s, w)

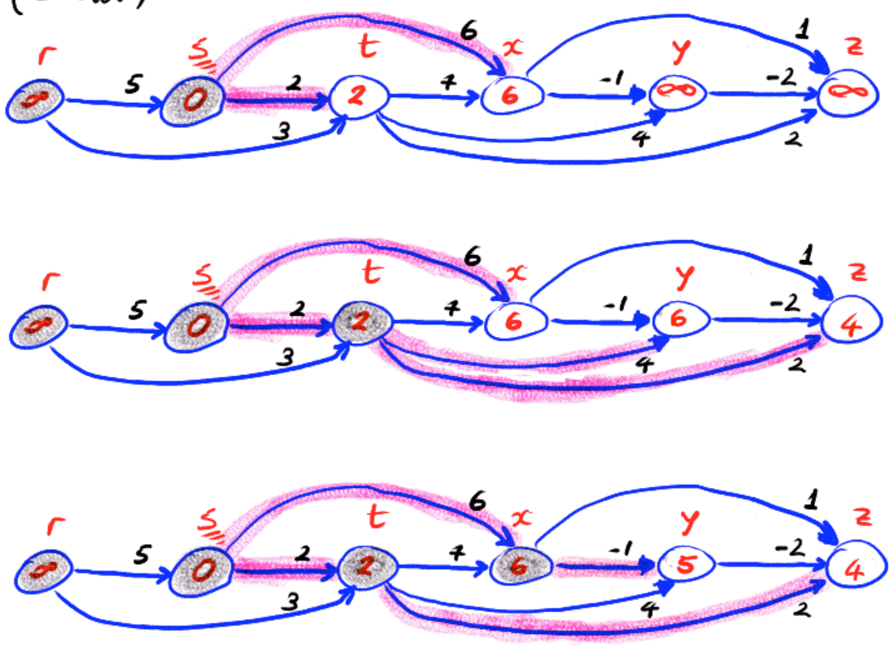
  Initialize-Single-Source (G, s) — $O(V)$
  sia $\prec$ un ordinamento topologico di G — $O(V+E)$
  for $v \in V[G]$ seguendo l'ordinamento $\prec$ **do** — $O(V+E)$
    SCAN$(v; G, w)$
    $S := S \cup \{v\}$

$O(V+E)$

ESEMPIO



ESEMPIO (cntd)



ESEMPIO (cntd)