CAMMINI MINIMI IN UN GRAFO

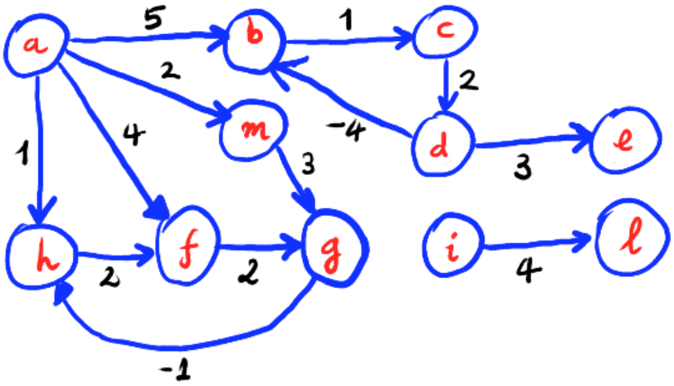
- SI TRATTA DI UNO DEI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE SU GRAFI PIÙ IMPORTANTE E PIÙ STUDIATO
- TROVA IMPORTANTI APPLICAZIONI IN
  - RETI DI TELECOMUNICAZIONI E DI TRASPORTO
  - PIANIFICAZIONE DEL TRAFFICO URBANO
  - ECC.

MA ANCHE NELLA RISOLUZIONE DI SOTTOPROBLEMI ALL'INTERNO DI ALTRI PROBLEMI

RICHIAMO DI ALCUNE DEFINIZIONI

- SIA V UN INSIEME FINITO DI NODI
- SIA $E \subseteq V \times V$ TALE CHE $(v,v) \notin E$ PER OGNI $v \in V$
- LA COPPIA $G = (V,E)$ E' UN GRAFO ORIENTATO.
  - V E' L'INSIEME DEI NODI DI G
  - E E' L'INSIEME DEGLI ARCHI DI G
- SIA $w : E \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE PESO O COSTO
- (G, w) SI DICE GRAFO PESATO

ES.



$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m\}$

$E = \{(a,b), (a,f), (a,h), (a,m), (b,c), (c,d),$
$(d,b), (d,e), (f,g), (g,h), (i,l), (h,f), (m,g)\}$

$w(a,b) = 5$, $w(a,f) = 4$, $w(a,h) = 1$, $w(a,m) = 2$, ...

MATRICE DI ADIACENZA

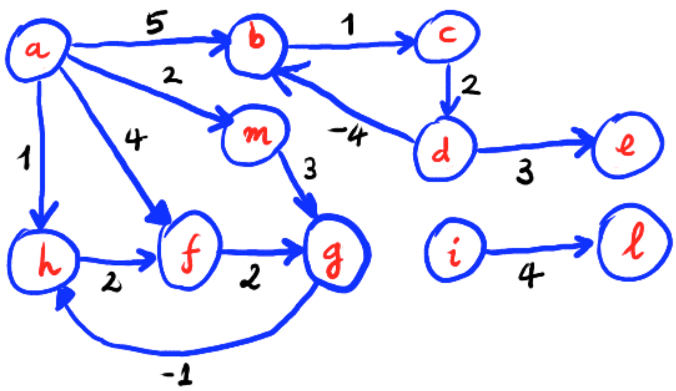
- DATO $G = (V, E)$, CON $V = \{1, 2, \dots, n\}$, LA **MATRICE DI ADIACENZA ASSOCIATA A** G E' LA MATRICE A DI DIMENSIONI $n \times n$ TALE CHE:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE } (i,j) \in E \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LISTE DI ADIACENZA

- DATO $G=(V,E)$ LE LISTE DI ADIACENZA ASSOCIATE A G SONO GLI INSIEMI $Adj_G(u)=\{v\in V : (u,v)\in E\}$ $(u\in V)$

ES.



x	$Adj(x)$
a	$\{b,f,h,m\}$
b	$\{c\}$
c	$\{d\}$
d	$\{b,e\}$
e	$\emptyset$
f	$\{g\}$
g	$\{h\}$
h	$\{f\}$
i	$\{l\}$
l	$\emptyset$
m	$\{g\}$

CAMMINI

- SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO CON FUNZIONE PESO $w: E \to \mathbb{R}$
- SIANO $u,v\in V$. UN CAMMINO DA u A v E' UNA SEQUENZA $\pi=(v_0,v_1,\dots,v_k)$ DI NODI DI G TALE CHE:
  - $v_0=u$, $v_k=v$
  - $(v_{i-1},v_i)\in E$, PER $i=1,2,\dots,k$

SI USA ANCHE LA NOTAZIONE: $v_0 \to v_1 \to \dots \to v_k$

- PONIAMO: $w(\pi) =_{def} \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1},v_i)$ (PESO/COSTO DI π)

$length(\pi) = k$ (LUNGHEZZA DI π)

$head(\pi) = v_0$

$tail(\pi) = v_k$

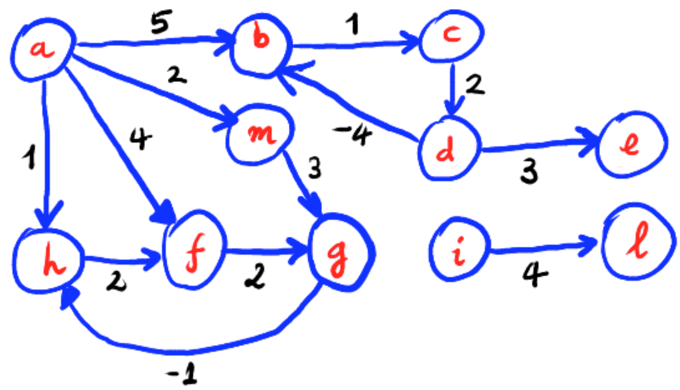
- PONIAMO INOLTRE:

$PATHS(G)$ = "INSIEME DI TUTTI I CAMMINI IN G"

$PATHS(G;u) = \{\pi \in PATHS(G) : head(\pi) = u\}$

$PATHS(G;u,v) = \{\pi \in PATHS(G) : head(\pi) = u, \; tail(\pi) = v\}$

ES.



$PATHS(G;a,h) =$
$\{(a,m,g,h), (a,h), (a,f,g,h)\}$

$w(a,m,g,h) = 4$

$w(a,h) = 1$

$w(a,f,g,h) = 5$

$PATHS(G;a,\ell) = \emptyset$

$PATHS(G;a,e) =$
$\{(a,b,c,d,e), (a,b,c,d,b,c,d,e)$
$(a,b,c,d,b,c,d,b c d,e), \dots\}$

CONCATENAZIONE DI CAMMINI

- SIANO $\pi_1 = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ E $\pi_2 = (v_k, v_{k+1}, \dots, v_\ell)$ DUE CAMMINI.

  SCRIVIAMO $\pi_1 ; \pi_2$ PER INDICARE LA CONCATENAZIONE DI π_1 E π_2, CIOE' IL CAMMINO:

  $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_\ell)$

- OVVIAMENTE VALE:

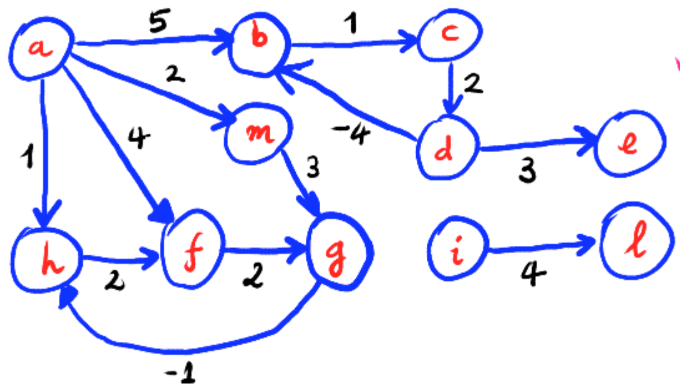
  $w(\pi_1 ; \pi_2) = w(\pi_1) + w(\pi_2)$.

DISTANZA

- PONIAMO $\delta_{(G,w)}(u,v) = \inf\{w(\pi) : \pi \in PATHS(G;u,v)\}$ (DISTANZA DI v DA u IN (G,w))

(CON $\inf \emptyset = +\infty$)

ES.

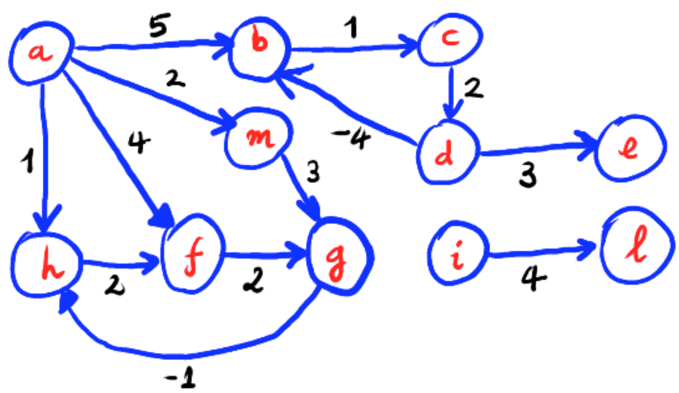


$PATHS(G; a, e) = \{(a,b);(b,c,d)^k;(d,e) : k \geq 1\}$

$w((a,b);(b,c,d)^k;(d,e))$
$= 5 + [(1+2)\cdot k - 4(k-1)] + 3$
$= 5 + (3k - 4k + 4) + 3 = 12 - k$

- QUINDI $\delta(a,e) = -\infty$
- ANALOGAMENTE $\delta(a,b) = \delta(a,c) = \delta(a,d) = -\infty$

ES.



$PATHS(G; a, i) = PATHS(G; a, \ell) = \emptyset$

QUINDI: $\delta(a,i) = \delta(a,\ell) = +\infty$

$PATHS(G; a, a) = \{(a)\}$

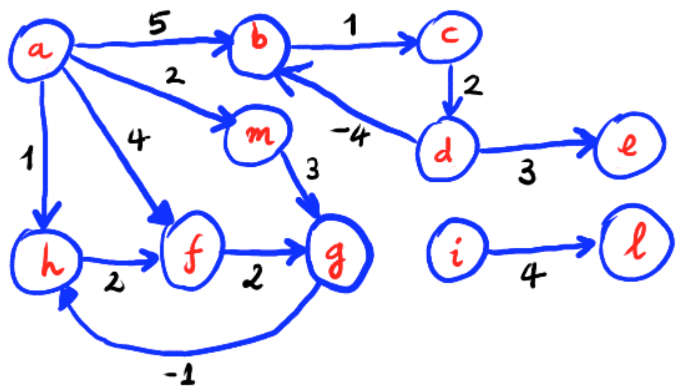
QUINDI $\delta(a,a) = 0$

$\delta(a,a) = 0$
$\delta(a,b) = -\infty$
$\delta(a,c) = -\infty$
$\delta(a,d) = -\infty$
$\delta(a,e) = -\infty$
$\delta(a,f) = 3$
$\delta(a,g) = 5$
$\delta(a,h) = 1$
$\delta(a,i) = +\infty$
$\delta(a,\ell) = +\infty$
$\delta(a,m) = 2$

CAMMINI MINIMI

- UN CAMMINO $\pi \in PATHS(G; u, v)$ E' MINIMO SE $w(\pi) = \delta(u, v)$

ES.



(a, b, c, d) NON E' MINIMO
(a, m, g) E' MINIMO
(i, l) E' MINIMO
(a, f, g, h) NON E' MINIMO
(a, h) E' MINIMO

PROBLEMA 1 DATO (G, w), CON $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$, E DATI $u, v \in V$ CALCOLARE $\delta(u, v)$.

PROBLEMA 2 DATO (G, w), CON $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$, E DATO $s \in V$ (SORGENTE), CALCOLARE $\delta(s, v)$ PER OGNI $v \in V$
(SINGLE-SOURCE SHORTEST PATHS PROBLEM)

PROBLEMA 3 DATO (G, w), CON $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$, E DATO $t \in V$ (DESTINAZIONE) CALCOLARE $\delta(v, t)$ PER OGNI $v \in V$

PROBLEMA 4 DATO (G, w), CON $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}$, CALCOLARE $\delta(u, v)$ PER OGNI $u, v \in V$.
(ALL-PAIRS SHORTEST PATHS PROBLEM)

OSSERVAZIONI:

- NON E' NOTO ALCUN ALGORITMO CHE RISOLVA DIRETTAMENTE IL PROBLEMA 1
- IL PROBLEMA 4 PUÒ ESSERE RISOLTO ITERANDO LA SOLUZIONE 2 PER CIASCUN VERTICE

DEFINIZIONI:

- UN GRAFO AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s SE $\delta(s,v) \neq -\infty$, PER OGNI $v \in V$
- UN GRAFO AMMETTE CAMMINI MINIMI SE $\delta(u,v) \neq -\infty$, PER OGNI $u, v \in V$

LEMMA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHE' UN GRAFO PESATO (G,w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA UNA SORGENTE s E' CHE NON VI SIA ALCUN CICLO DI PESO NEGATIVO RAGGIUNGIBILE DA s.

DIM. (NECESSITA')

SE DA s E' POSSIBILE RAGGIUNGERE (MEDIANTE UN CAMMINO π DA s A v) UN CICLO γ DI PESO NEGATIVO DA v A v, ALLORA:

$$PATHS(G; s,v) \supseteq \{ \pi;(\gamma)^k : k \geq 0 \}.$$

MA $\inf(w(PATHS(G;s,v)) \leq \inf(w(\{\pi;(\gamma)^k : k \geq 0\})) = -\infty$

QUINDI G NON AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s.

(SUFFICIENZA)

SUPPONIAMO CHE DA s NON SIA RAGGIUNGIBILE ALCUN CICLO DI PESO NEGATIVO.

PER OGNI v PONIAMO:

$\text{SIMPLE\_PATHS}(G; s, v) = \{\pi \in \text{PATHS}(G; s, v) : \pi \text{ SEMPLICE}\}$.

E' FACILE VERIFICARE CHE

$(\forall \pi \in \text{PATHS}(G; s, v))(\exists \pi' \in \text{SIMPLE\_PATHS}(G; s, v))\ w(\pi') \leq w(\pi)$

QUINDI $\inf(w(\text{SIMPLE\_PATHS}(G; s, v))) = \inf(w(\text{PATHS}(G; s, v)))$.

POICHE' $\text{SIMPLE\_PATHS}(G; s, v)$ E' FINITO,

$\inf(w(\text{SIMPLE\_PATHS}(G; s, v))) \neq -\infty$, DA CUI $\delta_{G_s}(v) \neq -\infty$,

DATA L'ARBITRARIETA' DI v, CONCLUDIAMO CHE G AMMETTE CAMMINI MINIMI DA s. ■

COROLLARIO CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHE' UN GRAFO PESATO (G, w) AMMETTA CAMMINI MINIMI E' CHE NON CONTENGA ALCUN CICLO DI PESO NEGATIVO.

COROLLARIO OGNI GRAFO CON FUNZIONE PESO NON NEGATIVA AMMETTE SEMPRE CAMMINI MINIMI

COROLLARIO OGNI GRAFO ACICLICO AMMETTE SEMPRE CAMMINI MINIMI

UNA PROPRIETA' DEI CAMMINI MINIMI (SOTTOSTRUTTURA OTTIMA)

SIA $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ UN CAMMINO MINIMO IN (G, w), CON $G = (V, E)$ E $w : E \to \mathbb{R}$.

ALLORA IL SOTTOCAMMINO $\pi_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$, PER OGNI $0 \leq i \leq j \leq k$, E' MINIMO

DIM SE π_{ij} NON FOSSE MINIMO, ESISTEREBBE UN CAMMINO π'_{ij} DA v_i A v_j TALE CHE $w(\pi'_{ij}) < w(\pi_{ij})$.

SI CONSIDERI ALLORA IL CAMMINO

$\pi' = (v_0, v_1, \dots, v_i) ; \pi'_{ij} ; (v_j, v_{j+1}, \dots, v_k)$.

SI HA: $w(\pi') = w(v_0, \dots, v_i) + w(\pi'_{ij}) + w(v_j, \dots, v_k)$
$< w(v_0, \dots, v_i) + w(\pi_{ij}) + w(v_j, \dots, v_k) = w(\pi)$,

CONTRADDICENDO LA MINIMALITA' DI $w(\pi)$. ■

CAMMINI MINIMI DA UNA SINGOLA SORGENTE

- SIA (G, w) UN GRAFO PESATO, CON $G = (V, E)$ E $w : E \to \mathbb{R}$ E SIA $s \in V$ UNA SORGENTE ASSEGNATA

SUPPONIAMO CHE (G, w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA s

- COME MEMORIZZARE IN MANIERA EFFICIENTE UN CAMMINO MINIMO DA s PER CIASCUN NODO $v \in V$ RAGGIUNGIBILE DA s?

- UNA SOLUZIONE INGENUA CONSISTE NEL MEMORIZZARE $O(n)$ LISTE, CIASCUNA DI LUNGHEZZA $O(n)$, IN QUANTO VI SONO $O(n)$ NODI RAGGIUNGIBILI DA s ED OGNI CAMMINO MINIMO DA s HA LUNGHEZZA $O(n)$, DOVE $n = |V|$.

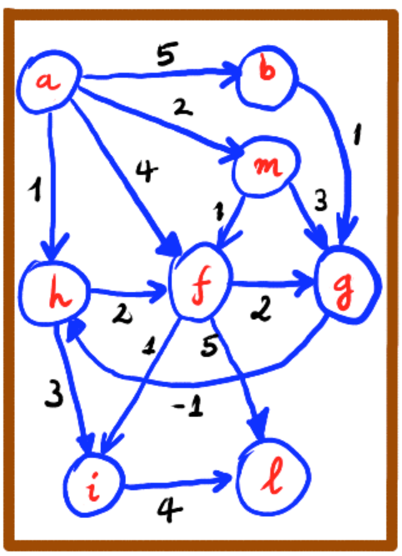
COMPLESSITA' SPAZIALE: $O(n^2)$

GRAFO DEI CAMMINI MINIMI

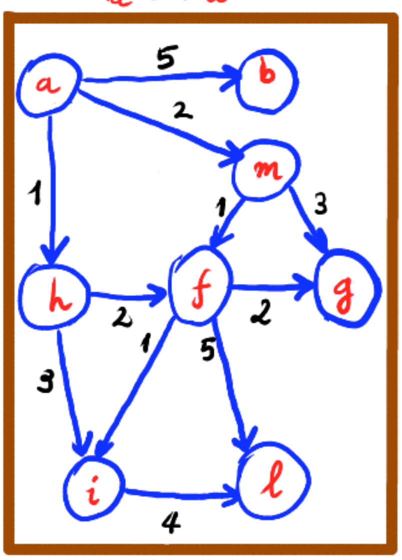
- SIA $MIN\_PATHS(G;s)$ L'INSIEME DI TUTTI I CAMMINI MINIMI DA s IN G
- SIA E_s' L'INSIEME DI TUTTI GLI ARCHI CONTENUTI IN QUALCHE CAMMINO MINIMO DA s
  (CIOE' $E_s' = \{(u,v) \in \pi : \pi \in MIN\_PATHS(G;s)\}$)
- CHIAMIAMO IL GRAFO $G_s' = (V, E_s')$ GRAFO DEI CAMMINI MINIMI DA s IN G

ES.

$G = (V, E)$



$G_a' = (V, E_a')$



PROPRIETA' $MIN\_PATHS(G;s) \neq \emptyset \Rightarrow PATHS(G'_s;s) = MIN\_PATHS(G;s)$

DIM.

- DALLA DEFINIZIONE DI G'_s SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE

$$MIN\_PATHS(G;s) \subseteq PATHS(G'_s;s).$$

- SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE: $PATHS(G'_s;s) \nsubseteq MIN\_PATHS(G;s)$ E SIA $\pi \in PATHS(G'_s;s)$ DI **LUNGHEZZA MINIMA** TALE CHE $\pi \notin MIN\_PATHS(G;s)$.
- PONIAMO $\pi = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, CON $v_0 = s$. QUINDI VALE $k \geq 1$.
- INOLTRE, PER LA MINIMALITA' DI π,

$$(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) \in MIN\_PATHS(G;s)$$

DA CUI: $w(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_{i-1}, v_i) = \delta(s, v_{k-1})$.

- SIA $\bar{\pi} = \underbrace{\underbrace{s \to \dots \to v_{k-1}}_{\bar{\pi}_0} \to v_k}_{\bar{\pi}_1} \to \dots \to v$ UN CAMMINO MINIMO DA s CONTENENTE L'ARCO $v_{k-1} \to v_k$

- ALLORA $\bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1 \in MIN\_PATHS(G;s)$, DA CUI

$$w(\bar{\pi}_0) = \delta(s, v_{k-1}) = w(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$$

$$w(\bar{\pi}_1) = \delta(s, v_k)$$

- QUINDI: $\delta(s, v_k) = w(\bar{\pi}_1) = w(\bar{\pi}_0) + w(v_{k-1}, v_k)$

$$= w(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}) + w(v_{k-1}, v_k) = w(\pi)$$

CIOE' $\pi \in MIN\_PATHS(G;s)$, ASSURDO.

- PERTANTO: $PATHS(G'_s;s) \subseteq MIN\_PATHS(G;s)$

E QUINDI $PATHS(G'_s;s) = MIN\_PATHS(G;s)$. ■

ALBERO DEI CAMMINI MINIMI

PROPRIETÀ

SIA (G,w) UN GRAFO PESATO, CON $G=(V,E)$ E $w: E \to \mathbb{R}$
E SIA $s \in V$ UNA SORGENTE ASSEGNATA

SUPPONIAMO CHE (G,w) AMMETTA CAMMINI MINIMI DA s

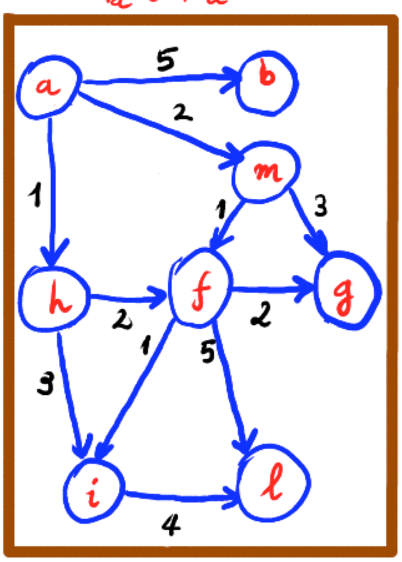
ALLORA ESISTE UN ALBERO $G''_s = (V''_s, E''_s)$, CON $V'' \subseteq V$ E $E''_s \subseteq E$, RADICATO IN s E CONTENENTE ESATTAMENTE UN CAMMINO MINIMO (IN G) DA s PER CIASCUN NODO $v \in V$ RAGGIUNGIBILE DA s IN G (ALBERO DEI CAMMINI MINIMI)

DIM. BASTA EFFETTUARE UNA VISITA (ES. BFS O DFS) DA s NEL GRAFO DEI CAMMINI MINIMI $G'_s = (V, E'_s)$. ■

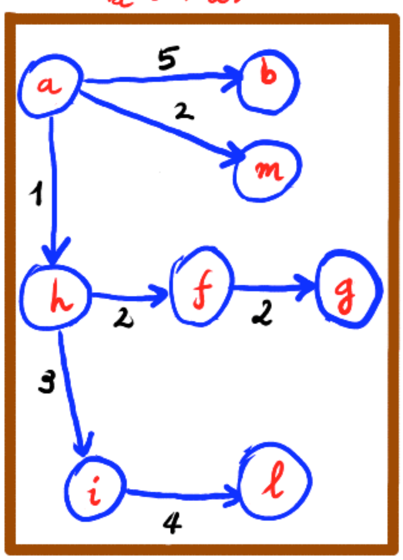
COMPLESSITÀ SPAZIALE: $O(n)$

ES.

$G'_a = (V, E'_a)$



$G''_a = (V''_a, E''_a)$



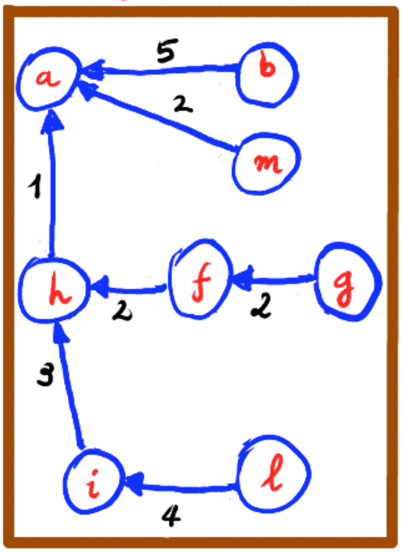
- COME RAPPRESENTARE $G''_a = (V'', E''_a)$ IN MANIERA EFFICIENTE?

ES.

RAPPRESENTAZIONE EFFICIENTE DI $G''_a = (V'', E''_a)$

FUNZIONE $Pred : V'' \longrightarrow V'' \cup \{NIL\}$

$G''_a = (V'', E''_a)$



x	$Pred(x)$
a	NIL
b	a
f	h
g	f
h	a
i	h
l	i
m	a

ES. CAMMINO MINIMO DA s A g

$Pred^{(0)}(g) = g$

$Pred^{(1)}(g) = Pred(g) = f$

$Pred^{(2)}(g) = Pred(f) = h$

$Pred^{(3)}(g) = Pred(h) = a$

$Pred^{(4)}(g) = Pred(a) = NIL$

$\boxed{(a, h, f, g)}$