Grafi e reti di flusso

Molti problemi di ottimizzazione sono caratterizzati da una struttura di grafo: in molti casi questa struttura emerge in modo naturale, in altri nasce dal particolare modo in cui i problemi vengono modellati. Ad esempio, una rete stradale è naturalmente rappresentabile come un grafo in cui i nodi sono gli incroci e gli archi le strade; pertanto non è strano che il settore dei trasporti sia uno di quelli in cui la teoria dei grafi trova maggiore applicazione.

Reti di flusso

Con il termine **rete** indichiamo un grafo pesato, cioè un grafo ai cui nodi e/o archi sono associati valori numerici detti **pesi**. In generale, in una rete gli archi sono interpretabili come canali attraverso cui fluiscono dei beni, che possono essere rappresentati per mezzo di grandezze discrete (ad esempio il numero di auto su una strada, o il numero di messaggi su una rete di comunicazione) o continue (quantità di petrolio che fluisce in un oleodotto), possono rappresentare dei valori assoluti oppure dei valori relativi (per unità di tempo). In questo contesto, i pesi degli archi rappresentano usualmente delle capacità e dei costi, mentre i pesi sui nodi possono rappresentare la quantità dei beni che entrano, o che ne escono, in quei nodi.

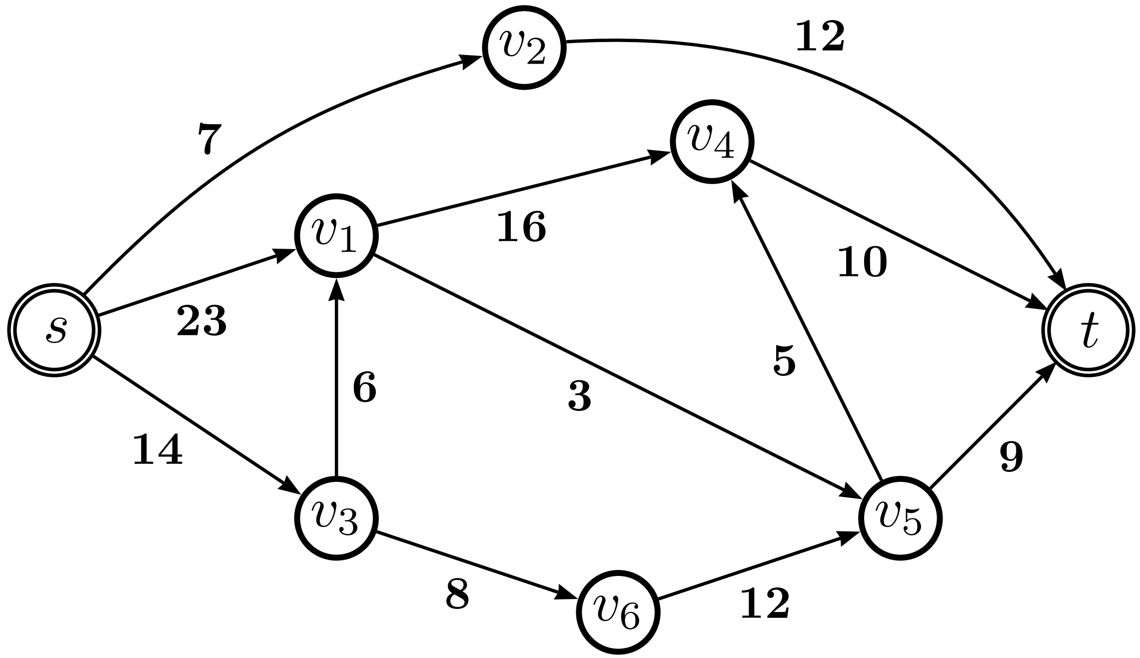
Reti di flusso

Formalmente una rete di flusso è definita come un grafo orientato $G = (V, E)$ tale che

- Ad ogni arco $(u, v) \in E$ è associato un valore non negativo, $c(u, v) \geq 0$, detto **capacità** dell'arco. Se il nodo (u, v) non è presente in E allora assumiamo che l'arco (u, v) abbia capacità nulla, cioè $c(u, v) = 0$.
- Nella rete di flusso ci sono due vertici speciali: il vertice **sorgente**, indicato con il simbolo s, ed il vertice **pozzo**, indicato con il simbolo t.
- Ogni vertice giace su qualche cammino dalla sorgente al pozzo. Il grafo è quindi connesso e pertanto vale $|E| \geq |V| - 1$.

Reti di flusso

La figura mostra un esempio di rete di flusso. Il vertice sorgente ed il pozzo sono rappresentati, rispettivamente, dai simboli s e t. Ad ogni arco $(u, v) \in E$ è associato il valore $c(u, v)$.



Flusso “reale” in una rete

Data una rete $G = (V, E)$ con capacità $c : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, un **flusso reale** in G è una funzione $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ che soddisfa le seguenti proprietà

- **Vincolo di capacità**

  per ogni $(u, v) \in E$, si richiede che $\varphi(u, v) \leq c(u, v)$

- **Conservazione del flusso (legge di Kirchhoff)**

  per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$, si richiede che

$$\sum_{\substack{v \in V \\ (u,v) \in E}} \varphi(u, v) = \sum_{\substack{v \in V \\ (v,u) \in E}} \varphi(v, u)$$

  (In altre parole, il flusso uscente da u è uguale a quello entrante in u, per ogni $u \in V - \{s, t\}$.)

La quantità $\varphi(u, v)$ è chiamata **flusso reale** lungo l’arco (u, v).

Flusso “netto” in una rete

Data una rete $G = (V, E)$ con capacità $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ e con un **flusso reale** $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$, poniamo

$$f(u, v) = \varphi(u, v) - \varphi(v, u)\,,$$

per ogni $(u, v) \in V \times V$.

La quantità $f(u, v)$ è chiamata **flusso netto** dal vertice u al vertice v.

Proprietà del flusso netto

Sia $G = (V, E)$ una rete con capacità $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ e con flusso netto (spesso detto semplicemente flusso) $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (proveniente da un dato flusso reale $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$). Allora valgono le seguenti proprietà:

- **Vincolo di capacità**

  $f(u, v) \leq c(u, v)$, per tutti gli $u, v \in V$.

- **Antisimmetria**

  $f(u, v) = -f(v, u)$, per tutti gli $u, v \in V$.

- **Conservazione del flusso**

  $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$, per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$.

  (Cioè, il flusso netto uscente da u è nullo, per ogni $u \in V - \{s, t\}$.)

Il vincolo di capacità

Per tutti gli $u, v \in V$*, si richiede che* $f(u, v) \leq c(u, v)$

Il vincolo di capacità dice semplicemente che il flusso netto da un vertice ad un altro non può eccedere la corrispondente capacità.

La proprietà antisimmetrica

Per tutti gli $u, v \in V$*, si richiede che* $f(u, v) = -f(v, u)$

L'antisimmetria dice che il flusso netto da un vertice u ad un vertice v è l'opposto del flusso netto nella direzione inversa. Quindi il flusso netto da un vertice a se stesso deve essere 0, perchè per ogni $u \in V$ abbiamo $f(u, u) = -f(u, u)$, il che implica $f(u, u) = 0$.

La proprietà di conservazione del flusso

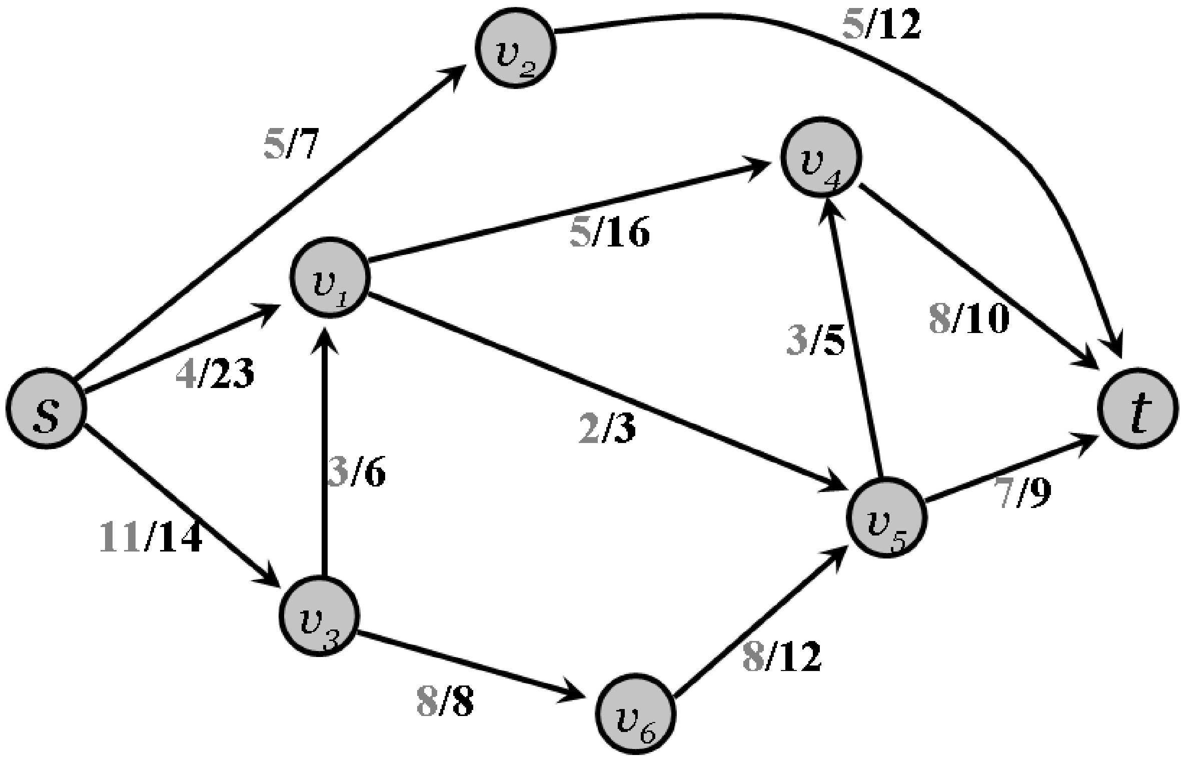
Per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$*, si richiede che* $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

La proprietà di conservazione del flusso dice che il flusso totale che esce da un vertice di transizione deve essere 0. Per l'antisimmetria possiamo scrivere la proprietà di conservazione come

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = 0$$

Flusso in una rete: esempio

La figura mostra un esempio di flusso reale in una rete. Ad ogni arco $(u, v) \in E$ sono associati due valori x/y con $x = \varphi(u, v)$ e $y = c(u, v)$. Si noti come i 2 vincoli dei flussi reali siano rispettati.



Flusso massimo

Il **valore** di un flusso f è definito come

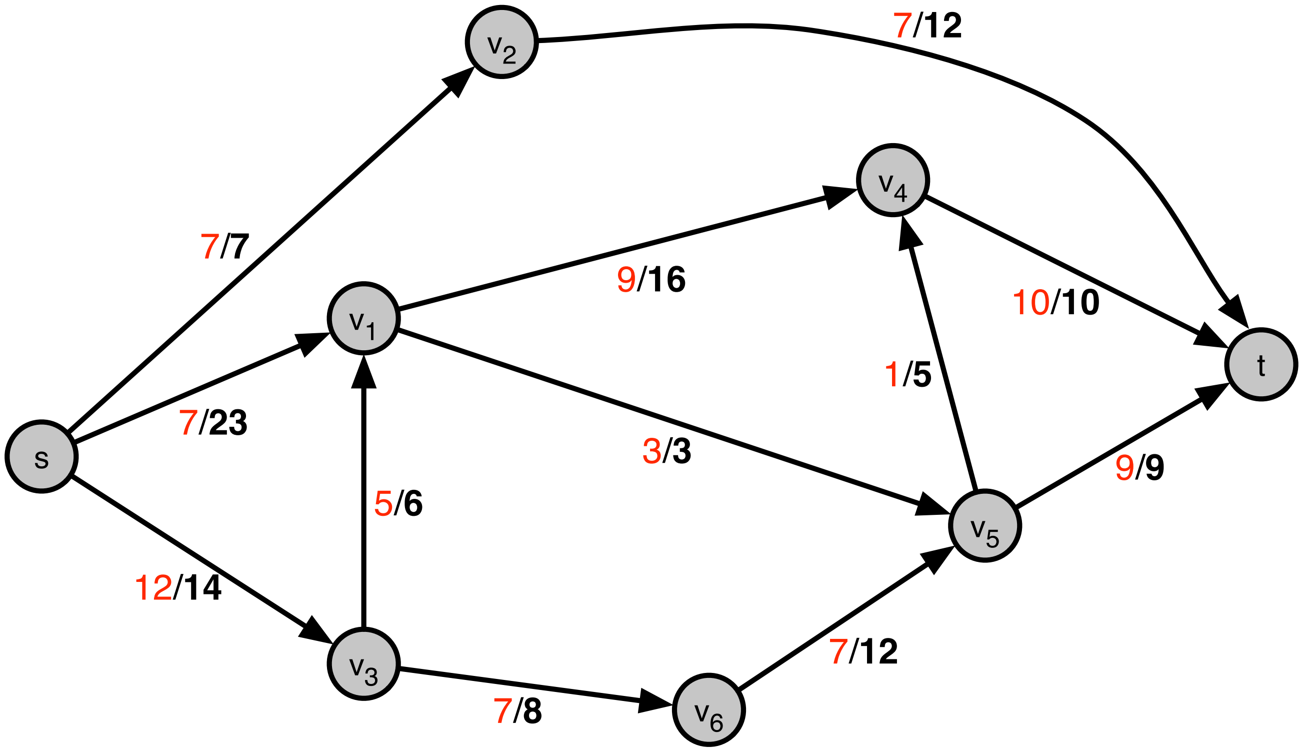
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

cioè come il flusso netto totale uscente dalla sorgente.

Nel **problema di flusso massimo** viene data una rete di flusso (G, c) con sorgente s e pozzo t e si vuole trovare un flusso netto di valore massimo (da s a t).

Flusso massimo: esempio

La figura mostra un esempio di flusso massimo in una rete. Il valore di tale flusso è dato da $|f| = f(s, v_1) + f(s, v_2) + f(s, v_3) = 7 + 7 + 12 = 26$.



Reti con sorgenti e pozzi multipli

Un problema di flusso massimo su una rete G può avere diverse sorgenti $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$, e diversi pozzi $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Tuttavia si può ridurre il problema di determinare il flusso massimo in una rete con sorgenti multiple e pozzi multipli ad un problema di flusso massimo ordinario. Questo viene fatto trasformando la rete G in una rete di flusso ordinaria G' con singola sorgente e singolo pozzo nel modo seguente

- si aggiunge una **super-sorgente** s ed un arco orientato (s, s_i), per ogni $i = 1, ..., m$, con capacità $c(s, s_i) = \infty$
- si aggiunge una **super-pozzo** t ed un arco orientato (t_j, t), per ogni $j = 1, ..., n$, con capacità $c(t_j, t) = \infty$

Intuitivamente, ogni flusso nella rete G' corrisponde ad un flusso nella rete G.

La notazione di sommatoria implicita

Se X e Y sono due insiemi di vertici allora

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$$

In accordo con questa notazione il vincolo di conservazione del flusso può essere espresso come la condizione che $f(u, V) = 0$ per tutti gli $u \in V - \{s, t\}$.

Inoltre, per definizione, si ha $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = f(s, V)$

Lemma 1

Sia $G = (V, E)$ *una rete di flusso, e sia* f *un flusso in* G*. Allora:*

- per $X \subseteq V$ si ha $f(X, X) = 0$;
- per $X, Y \subseteq V$ si ha $f(X, Y) = -f(Y, X)$;
- per $X, Y, Z \subseteq V$ con $X \cap Y = \emptyset$, si ha
  $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ e
  $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$;

Corollario 1

Il valore di un flusso è il flusso netto totale entrante nel pozzo, cioè

$$|f| = f(V, t)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
|f| &= f(s, V) && \text{(per definizione)} \\
&= f(V, V) - f(V - s, V) && \text{(per il Lemma 1)} \\
&= f(V, V - s) && \text{(per il Lemma 1)} \\
&= f(V, t) + f(V, V - s - t) && \text{(per il Lemma 1)} \\
&= f(V, t) && \text{(per la conservazione del flusso)}
\end{aligned}$$

Il metodo di Ford-Fulkerson

Il metodo di Ford-Fulkerson è iterativo. Si parte con $f(u, v) = 0$ per tutti gli $u, v \in V$, ottenendo un flusso iniziale di valore 0. Ad ogni iterazione si incrementa il valore del flusso cercando un **cammino aumentante**, che possiamo pensare come un cammino dalla sorgente al pozzo lungo il quale possiamo inviare un ulteriore flusso. Questo processo viene ripetuto finchè non si può più trovare alcun cammino aumentante. Al termine questo metodo produce un flusso massimo.

```
Ford-Fulkerson(G, s, t)
    inizializza il flusso f a 0
    while esiste un cammino aumentante p
        do aumenta il flusso f lungo p
    return f
```

Capacità residua

Sia f un flusso in una rete (G, c), e si consideri una coppia di vertici $u, v \in V$. La quantità di flusso netto addizionale che possiamo inviare da u a v prima di superare la capacità $c(u, v)$ è la **capacità residua** di (u, v), ed è data da

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

Quando il flusso netto $f(u, v)$ è negativo, la capacità residua $c_f(u, v)$ è maggiore della capacità $c(u, v)$.

Rete residua

Data una rete di flusso (G, c) ed un flusso f, **la rete residua** di G indotta da f è $G_f = (V, E_f)$, dove

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$$

Ogni arco della rete, chiamato **arco residuo**, può ammettere un flusso netto strettamente positivo.

Un arco (u, v) può essere un arco residuo in E_f, anche se esso non fosse un arco in E, ma purché $(v, u) \in E$. Ciò implica che non sempre vale la relazione $E_f \subseteq E$. Però si ha sempre:

$$|E_f| \leq 2 \cdot |E| \, .$$

Si osservi che la rete residua G_f è essa stessa una rete di flusso avente capacità definita dalla funzione c_f.

Lemma 2

Sia (G, c) una rete di flusso, e sia f un flusso in G. Sia G_f la rete residua di G indotta da f e sia f' un flusso in G_f. Allora la somma di flussi $f + f'$ è un flusso in G con valore $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Dimostrazione.

Dobbiamo verificare che siano soddisfatte la proprietà antisimmetrica, i vincoli di capacità e la conservazione del flusso.

Proprietà antisimmetrica.

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v) \\
&= -f(v,u)-f'(v,u) \\
&= -(f(v,u)+f'(v,u)) \\
&= -(f+f')(v,u)
\end{aligned}
$$

Vincolo di capacità

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v) \\
&\leq f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v)) \\
&= c(u,v)
\end{aligned}
$$

Conservazione del flusso

Sia $u \in V \setminus \{s,t\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} (f+f')(u,v) &= \sum_{v \in V} (f(u,v) + f'(u,v)) \\
&= \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|f+f'| &= \sum_{v \in V} (f+f')(s,v) \\
&= \sum_{v \in V} (f(s,v) + f'(s,v)) \\
&= \sum_{v \in V} f(s,v) + \sum_{v \in V} f'(s,v) \\
&= |f| + |f'|
\end{aligned}$$

Cammini aumentanti

Data una rete di flusso (G, c) con flusso f, un **cammino aumentante** p è un cammino semplice dalla sorgente al pozzo nella rete residua G_f. Per definizione di rete residua, ogni arco (u, v) su un cammino aumentante ammette un qualche flusso netto positivo addizionale da u a v senza violare il vincolo di capacità sull'arco.

La massima quantità di flusso netto che possiamo inviare lungo gli archi di un cammino aumentante si chiama **capacità residua** di p ed è data da

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ è un arco di } p\} .$$

Si osservi che vale sempre

$$c_f(p) > 0 .$$

Lemma 3

Sia (G, c) una rete di flusso, sia f un flusso di G, e sia p un cammino aumentante in G_f. Si definisca una funzione $f_p : V \times V \to R$ ponendo:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{se } (u, v) \text{ è su } p \\ -c_f(p) & \text{se } (v, u) \text{ è su } p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora f_p è un flusso in G_f con valore $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Corollario

Sia (G, c) una rete di flusso, sia f un flusso di G, e sia p un cammino aumentante in G_f. Sia f_p definita come nel Lemma 3 e sia $f' : V \times V \rightarrow R$ la funzione

$$f' = f + f_p.$$

Allora f' è un flusso in G con valore $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.

Tagli in reti di flusso

Un **taglio** (S, T) in una rete di flusso (G, c) con sorgente s e pozzo t è una partizione di V in S e $T = V - S$ tale che $s \in S$ e $t \in T$.

Se f è un flusso, allora il flusso netto attraverso il taglio (S, T) è definito come $f(S, T)$. La capacità del taglio è $c(S, T)$.

Lemma 4

Sia f un flusso su una rete (G, c) con sorgente s e pozzo t, e sia (S, T) un taglio di G. Allora il flusso netto attraverso (S, T) è $f(S, T) = |f|$.

Dimostrazione.

Usando il Lemma 1 otteniamo

$$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \end{aligned}$$

Corollario

Il valore di un qualunque flusso f in una rete di flusso (G, c) è limitato superiormente dalla capacità di un qualunque taglio di G.

Dimostrazione.

Sia (S, T) un taglio di G e sia f un flusso su G. Per il Lemma 4 ed i vincoli di capacità si ottiene

$$\begin{aligned} |f| &= f(S,T) \\ &= \textstyle\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\ &\leq \textstyle\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

Teorema - *flusso massimo taglio minimo*

Se f è un flusso in una rete di flusso (G, c) con sorgente s e pozzo t, allora le seguenti condizioni sono equivalenti

1. *f è un flusso massimo in G.*
2. *La rete residua G_f non contiene cammini aumentanti.*
3. *$|f| = c(S, T)$, per qualche taglio (S, T) di G.*

Dimostrazione $(1. \rightarrow 2.)$

Si supponga per assurdo che f sia un flusso massimo in G ma che G_f abbia un cammino aumentante p. Allora la somma dei flussi $f + f_p$ è un flusso in G tale che $|f + f_p| > |f|$, contraddicendo l'ipotesi di massimalità di f.

Dimostrazione $(2. \rightarrow 3.)$

Si supponga che G_f non abbia cammini aumentanti, cioè che G_f non contenga cammini da s a t. Si definisca $S = \{v \in V$: esiste un cammino da s a v in $G_f\}$ e $T = V - S$. Dato che $s \in S$ e $t \in T$, la partizione (S, T) è un taglio. Per ogni coppia di vertici u e v tali che $u \in S$ e $v \in T$, abbiamo che $f(u, v) = c(u, v)$, perchè altrimenti avremmo che $(u, v) \in E_f$ e v sarebbe nell'insieme S. Quindi, per il Lemma 4, $|f| = f(S, T) = c(S, T)$.

Dimostrazione $(3. \rightarrow 1.)$

Si ha che $|f| \leq c(S, T)$ per tutti i tagli (S, T). La condizione $|f| = c(S, T)$ implica quindi che $|f|$ sia un flusso massimo.

L'algoritmo di Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, s, t)

for ogni arco $(u, v) \in E$ **do**

    $f(u, v) = 0$

    $f(v, u) = 0$

while esiste un cammino p da s a t nella rete residua G_f **do**

    $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v)$ è in $p\}$

    for (u, v) in p **do**

        $f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$

        $f(v, u) = -f(u, v)$

Analisi di Ford-Fulkerson

Il tempo di esecuzione dell'algoritmo di Ford-Fulkerson dipende da come viene determinato il cammino aumentante p alla linea 4. Se questa scelta viene fatta male l'algoritmo può anche non terminare.

Se si suppone che tutte le capacità della rete siano dei valori interi, allora una semplice implementazione di Ford-Fulkerson ha un tempo di esecuzione $\mathcal{O}(E|f^*|)$, dove f^* è il flusso massimo trovato dall'algoritmo. Infatti

- il ciclo **for** 1–3 richiede tempo $\mathcal{O}(E)$
- il ciclo **while** 4–8 viene eseguito al massimo $|f^*|$ volte, perchè il valore del flusso aumenta almeno di una unità ad ogni iterazione; inoltre, ad ogni iterazione, un cammino aumentante viene calcolato in tempo $\mathcal{O}(E)$.

Algoritmo di Edmonds-Karp

Il limite superiore per il tempo di esecuzione della procedura Ford-Fulkerson può essere migliorato se si realizza il calcolo del cammino aumentante p con una visita in ampiezza, cioè se il cammino aumentante è un cammino *minimo* da s a t nella rete residua, dove ogni arco ha distanza unitaria.

Chiamiamo il metodo di Ford-Fulkerson così modificato **algoritmo di Edmonds-Karp**. Dimostriamo che l'algoritmo di Edmonds-Karp richiede tempo $\mathcal{O}(VE^2)$.

Lemma 5

Se l'algoritmo di Edmonds-Karp viene eseguito su una rete di flusso $G = (V, E)$ *con sorgente* s *e pozzo* t*, allora per tutti i vertici* $v \in V - \{s, t\}$*, la distanza di cammino minimo* $\delta_f(s, v)$ *nella rete residua* G_f *cresce monotonicamente con ogni aumento di flusso.*

Dimostrazione

Si supponga per assurdo che per qualche vertice $v \in V - \{s, t\}$ esista un aumento di flusso che faccia decrescere $\delta_f(s, v)$. Sia f il flusso subito prima dell'aumento, e sia f' il flusso immediatamente dopo. Allora $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$.

Si può supporre senza perdere di generalità che $\delta_{f'}(s, v) \leq \delta_{f'}(s, u)$, per tutti i vertici $u \in V - \{s, t\}$ tali che $\delta_{f'}(s, u) < \delta_f(s, u)$. Equivalentemente possiamo assumere che per ogni vertice $u \in V - \{s, t\}, \;\; \delta_{f'}(s, u) < \delta_{f'}(s, v)$ implichi $\delta_f(s, u) \leq \delta_{f'}(s, u)$.

Dimostrazione (continua)

Prendiamo un cammino minimo p' in $G_{f'}$ da s a v e consideriamo il vertice u che precede v lungo questo cammino. Allora si ha $\delta_{f'}(s,u) < \delta_{f'}(s,v)$, poichè (u,v) è un arco di p', che è un cammino minimo da s a v. Per quanto detto prima abbiamo allora che $\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)$. Con i vertici v ed u determinati in questo modo, si consideri il flusso netto f da u a v.

Se $f(u,v) < c(u,v)$ allora abbiamo

$$\begin{aligned} d_f(s,v) &\leq d_f(s,u) + 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) \end{aligned}$$

che contraddice l'ipotesi che l'aumento di flusso faccia decrescere la distanza da s a v. Per cui si deve avere $f(u,v) = c(u,v)$. Cioè $(u,v) \notin E_f$.

Dimostrazione (continua)

Poichè per ipotesi $(u, v) \in E_{f'}$, ma $(u, v) \notin E_f$, il cammino aumentante p scelto in G_f per aumentare il flusso deve contenere l'arco (v, u).

Poichè p è un cammino minimo da s a t, i suoi sottocammini sono anch'essi cammini minimi, e quindi abbiamo $\delta_f(s, u) = \delta_f(s, v) + 1$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} d_f(s,v) &= d_f(s,u) - 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) - 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) - 2 \\ &< \delta_{f'}(s,v), \end{aligned}$$

che contraddice la nostra ipotesi iniziale.

Teorema

Se l'algoritmo di Edmonds-Karp viene eseguito su una rete di flusso $G = (V, E)$ *con sorgente* s *e pozzo* t*, allora il numero totale di aumenti di flusso effettuati dall'algoritmo è al massimo* $\mathcal{O}(VE)$.

Dimostrazione

Diciamo che un arco (u, v) in una rete residua G_f è critico su un cammino aumentante p se $c_f(p) = c_f(u, v)$. Dopo aver aumentato il flusso lungo il cammino aumentante, ogni arco critico lungo il cammino scompare dalla rete residua. Sia (u, v) un arco in una rete residua di G. Quante volte l'arco (u, v) può diventare critico?

Poichè i cammini aumentanti sono cammini minimi, quando (u, v) è critico in una rete residua G_f lungo un cammino aumentante selezionato dall'algoritmo abbiamo $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$.

Dimostrazione (continua)

Perchè (u, v) ricompaia nuovamente in una rete residua, è necessario che (v, u) diventi critico in una rete residua $G_{f'}$ successiva a G_f.

Quindi, poichè, per il Lemma 5, $\delta_{f'}(s, v) \geq \delta_f(s, v)$, si avrà che

$$\begin{aligned} \delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \delta_f(s,v) + 1 \\ &= \delta_f(s,u) + 2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, dal momento i cui (u, v) diventa critico al momento in cui diventa nuovamente critico, la distanza di u dalla sorgente deve aumentare di almeno 2 unità. La distanza di u dalla sorgente è, inizialmente, almeno 0, e fino al momento in cui esso diventa irraggiungibile dalla sorgente la sua distanza è al massimo $|V| - 1$. Quindi (u, v) può diventare critico al più $\mathcal{O}(V)$ volte. Poichè vi sono $\mathcal{O}(E)$ coppie di vertici che possono essere estremi di un arco in una rete residua, il numero totale di possibili incrementi di flusso è $\mathcal{O}(VE)$.