ALBERO DI CONNESSIONE MINIMO IN GRAFI SPARSI

- DATO UN GRAFO $G=(V,E)$, CON FUNZIONE PESO c, LA PROCEDURA MST-REDUCE (COMPLESSITA' $O(E)$) COSTRUISCE
  - UN GRAFO CONTRATTO $G'=(V',E')$ (CON $|V'| \leq |V|/2$) CON FUNZIONE PESO $c' : E' \to \mathbb{R}$
  - UN INSIEME DI ARCHI $T \subseteq E$
  - UN'APPLICAZIONE $orig' : E' \to E$

TALE CHE SE A E' UN MST DI (G', c') ALLORA $T \cup \{orig'[x,y] : (x,y) \in A\}$ E' UN MST DI (G,c)

```
MST-REDUCE(G, orig, c, T)
for each v ∈ V[G] do
    mark[v] ← FALSE
    MAKE-SET(v)
for each u ∈ V[G] do
    if mark[u] = FALSE then
        choose v ∈ Adj[u] such that c[u, v] is minimized
        UNION(u, v)
        T ← T ∪ {orig[u, v]}
        mark[u] ← mark[v] ← TRUE
V[G′] ← {FIND-SET(v) : v ∈ V[G]}
E[G′] ← Ø
for each (x, y) ∈ E[G] do
    u ← FIND-SET(x)
    v ← FIND-SET(y)
    if (u, v) ∉ E[G′] then
        E[G′] ← E[G′] ∪ {(u, v)}
        orig′[u, v] ← orig[x, y]
        c′[u, v] ← c[x, y]
    else if c[x, y] < c′[u, v] then
        orig′[u, v] ← orig[x, y]
        c′[u, v] ← c[x, y]
construct adjacency lists Adj for G′
return G′, orig′, c′, and T
```

- SI APPLICHI MST-REDUCE k VOLTE DI SEGUITO, ACCUMULANDO GLI ARCHI IN T, E SIA $(G', c', orig')$ IL GRAFO PESATO RISULTANTE, CON RELATIVA MAPPA $orig'$ (COMPLESSITA' $O(kE)$)

- QUINDI SI APPLICHI AL GRAFO (G', c') L'ALGORITMO DI PRIM (COMPLESSITA' $O(E' + V' \lg V')$)

- UTILIZZANDO LA MAPPA $orig'$ E' POSSIBILE RICOSTRUIRE UN MST PER (G, c)

- SI OSSERVI CHE $|V'| \leq \frac{|V|}{2^k}$, $|E'| \leq |E|$

- PER $k = \Theta(\log \log V)$, SI HA

- $O(kE) = O(E \log \log V)$
- $O(E' + V' \log V') = O(E + V' \log V) = O\left(E + \frac{V}{2^{\log \log V}} \log V\right)$

$$= O\left(E + \frac{V}{\log V} \log V\right) = O(E + V) = O(E)$$

E QUINDI IL TEMPO COMPLESSIVO E' $O(E \log \log V)$

- PER QUALI VALORI DI $|E|$ (IN FUNZIONE DI $|V|$) L'ALGORITMO DI PRIM CON PRE-ELABORAZIONE E' ASINTOTICAMENTE PIÙ EFFICIENTE DELL'ALGORITMO DI PRIM (SENZA PRE-ELABORAZIONE) ?

- VOGLIAMO CHE $E \lg\lg V = o(E + V\lg V)$.

MA : $E \lg\lg V = o(E + V\lg V)$

$$\Longleftrightarrow \frac{E + V\lg V}{E\lg\lg V} \to +\infty$$

$$\Longleftrightarrow \frac{E}{E\lg\lg V} + \frac{V\lg V}{E\lg\lg V} \to +\infty$$

$$\Longleftrightarrow \frac{V\lg V}{E\lg\lg V} \to +\infty$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{E = o\left(V\frac{\lg V}{\lg\lg V}\right)}$$