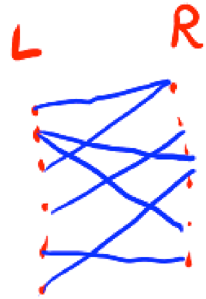
ACCOPPIAMENTO MASSIMO IN GRAFI BIPARTITI

GRAFO BIPARTITO



$G=(V,E)$ NON ORIENTATO

$V = L \cup R$, $L \cap R = \emptyset$, $L \neq \emptyset, R \neq \emptyset$

$\forall (u,v) \in E \ (u \in L \leftrightarrow v \in R)$

ACCOPPIAMENTO IN UN GRAFO NON ORIENTATO $G=(V,E)$

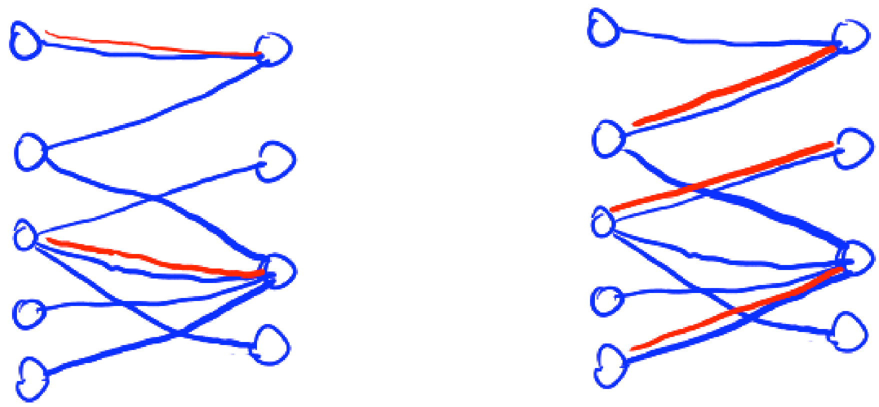
$M \subseteq E$ TALE CHE

$|\{u \in V : (u,v) \in M \text{ per qualche } v\}| = 2|M|$

$\forall (u,v) \in M, (u',v') \in M \rightarrow \{u,v\} = \{u',v'\} \vee \{u,v\} \cap \{u',v'\} = \emptyset$

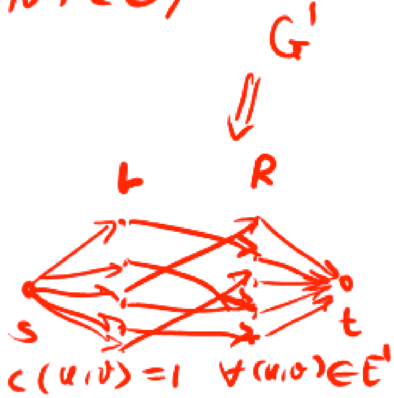
IL PROBLEMA DELL'ACCOPPIAMENTO MASSIMO IN UN GRAFO BIPARTITO E' IL PROBLEMA DI DETERMINARE UN ACCOPPIAMENTO DI CARDINALITA' MASSIMA

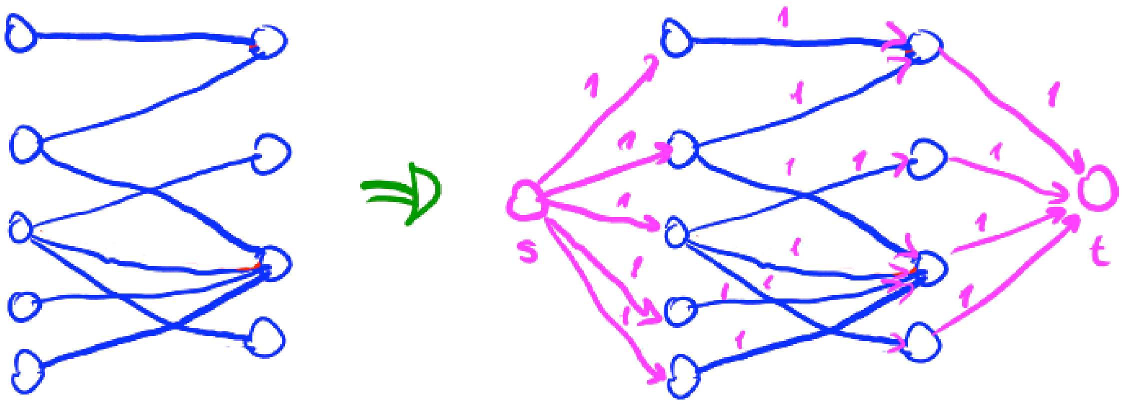
ES.



DATO $G=(V,E)$ BIPARTITO, CON BIPARTIZIONE (L,R), LA RETE DI FLUSSO CORRISPONDENTE A $G=(V,E)$ E' DATA DA (G',c), CON $G'=(V',E')$, TALE CHE:

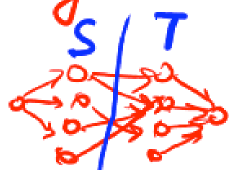
- $V'=V\cup\{s,t\}$ (CON $s\neq t$, $s,t\in V$)
- $E'=\{(u,v): u\in L, v\in R, (u,v)\in E\}$
  $\cup\{(s,u): u\in L\}$
  $\cup\{(v,t): v\in R\}$
- $c: E'\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
  $c(u,v)=1 \quad \forall (u,v)\in E'$





1) f flusso intero in $(G', c) \longmapsto M_f$ matching in G

TALE CHE $|f| = |M_f|$



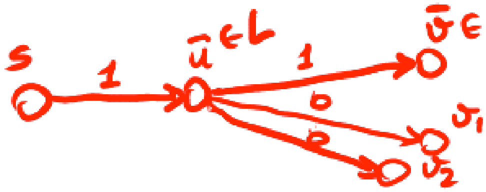
$M_f = \{ (u,v) : u \in L, v \in R, f(u,v) = 1 \}$ $\quad |f| = f(S,T) = |M_f|$

SI HA: (a) M_f E' UN MATCHING ✓

(b) $|f| = |M_f|$ ✓

$k=0$
$i=1$
$0 = \Sigma .. = 1 + k - 1 \cdot i$

$\overline{f}$ INTERO $\quad f(u,v) \in \{0, 1, -1\}$

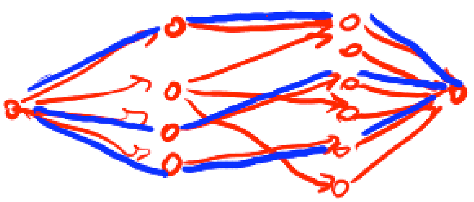


$f(\bar u, \bar v) = 1$

$$0 = \sum_{v \in V'} f(\bar u, v) = \underbrace{f(\bar u, s)}_{-1} + \overbrace{f(\bar u, \bar v)}^{1} + \cancel{f(\bar u, v_1)} + \underbrace{f(\bar u, v_2)}_{\{0,1\}} + \ldots$$

2) M matching in $G \longmapsto f_M$ flusso intero in (G', c)

TALE CHE $|M| = |f_M|$



$\forall (u,v) \in (L \times R) \cap M$

$f_M(u,v) = 1 \quad f_M(v,u) = -1$

$f_M(s,u) = 1 \quad f_M(u,s) = -1$

$f_M(v,t) = 1 \quad f_M(t,v) = -1$

$f_M \longmapsto M_{f_M} \; : \; |M_{f_M}| = |f_M| = |M|$

$\rightarrow M_{f_M} = M$

- PER CALCOLARE UN MATCHING MASSIMO IN G POSSIAMO:

v • CALCOLARE UN FLUSSO MASSIMO f^* IN (G', c) UTILIZZANDO IL METODO DI FORD-FULKERSON

• OSSERVARE CHE f^* E' UN FLUSSO INTERO

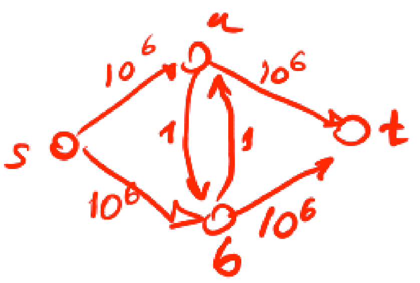
• CALCOLARE M_{f^*}

$\therefore$ M_{f^*} E' UN MATCHING MASSIMO IN G

COMPLESSITA': $|f^*| \leq \min(|L|, |R|) \leq \frac{|L \cup R|}{2}$

$\rightarrow$ $O(V)$ PASSI $= O(V)$

$\rightarrow$ COMPLESSITA' DI UN PASSO: $O(E)$ $\rightarrow$ $O(VE)$



(s, a, t)

(s, a, b, t)

(s, b, a, t)

(s, b, t)

ALGORITMO DI EDMONDS-KARP

- CONSISTE NELLO SCEGLIERE I CAMMINI AUMENTANTI CON LUNGHEZZA MINIMA
- CON TALE EURISTICA, L'ALGORITMO DI EDMONDS-KARP TERMINA IN $O(VE^2)$ PASSI.
- TALE RISULTATO SI BASA SULL'OSSERVAZIONE CHE CIASCUN ARCO PUÒ SPARIRE DALLA RETE RESIDUA AL PIÙ $O(V)$ VOLTE

LEMMA SIA $f_0, f_1, f_2, \dots$ LA SEQUENZA DEI FLUSSI IN UN'ESECUZIONE DI EDMONDS-KARP SU UNA RETE (G, c) CON $G = (V, E)$.
SIA $v \in V \setminus \{s, t\}$. ALLORA

$$\delta_{f_i}(s, v) \le \delta_{f_{i+1}}(s, v), \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

DIM. PER ASSURDO,
SUPPONIAMO CHE $\exists v \in V \setminus \{s, t\}$ $\exists i \in \mathbb{N}$ TALI CHE

- $\delta_{f_i}(s, v) > \delta_{f_{i+1}}(s, v)$
- $\delta_{f_{i+1}}(s, v)$ SIA MINIMALE

- $\delta_{f_i}(s,v) > \delta_{f_{i+1}}(s,v)$

$\Rightarrow \overset{v \neq s}{} \delta_{f_{i+1}}(s,v) \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ESISTE UN CAMMINO DA s A v

SIA $s \rightsquigarrow u \to v$ UN CAMMINO MINIMO IN $G_{f_{i+1}}$ DA s A v.

$$\delta_{f_{i+1}}(s,u) = \delta_{f_{i+1}}(s,v) - 1 < \delta_{f_{i+1}}(s,v)$$

$\Rightarrow$ (PER LA MINIMALITA' DI $\delta_{f_{i+1}}(s,v)$)

$$\delta_{f_i}(s,u) \leq \delta_{f_{i+1}}(s,u)$$

$(u,v) \overset{?}{\in} G_{f_i}$.

- SE $(u,v) \in G_{f_i}$ $\quad s \rightsquigarrow u \to v \quad G_{f_i}$

$$\delta_{f_i}(s,u) + 1 \geq \delta_{f_i}(s,v)$$

$$\delta_{f_i}(s,v) \leq \delta_{f_i}(s,u) + 1 \leq \delta_{f_{i+1}}(s,u) + 1 = \delta_{f_{i+1}}(s,v)$$

ASSURDO $\Rightarrow$ $(u,v) \notin G_{f_i}$

MA POICHE' $(u,v) \in G_{f_{i+1}}$, IL CAMMINO AUMENTANTE π UTILIZZATO PER CALCOLARE $G_{f_{i+1}}$ CONTIENE L'ARCO (v,u)

$\pi: \; s \rightsquigarrow v \rightarrow u \rightsquigarrow t \quad$ in G_{f_i}

$$
\begin{aligned}
\delta_{f_i}(s,v) &= \delta_{f_i}(s,u) - 1 \\
&\leq \delta_{f_{i+1}}(s,u) - 1 \\
&= \delta_{f_{i+1}}(s,v) - 2 \\
&< \delta_{f_{i+1}}(s,v)
\end{aligned}
$$

ASSURDO, DA CUI IL LEMMA. ■

LEMMA

IL NUMERO TOTALE DI INCREMENTI DI FLUSSO NEL CORSO DI UN'ESECUZIONE DELL'ALGORITMO DI EDMONDS-KARP SU UNA RETE DI FLUSSO (G, c), CON $G = (V, E)$, E' $O(VE)$.

DIM

- POICHE' AD OGNI INCREMENTO DI FLUSSO ALMENO UN ARCO VIENE CANCELLATO DALLA RETE RESIDUA, E' SUFFICIENTE VALUTARE QUANTE VOLTE UN ARCO PUÒ ESSERE CANCELLATO

- SIA (u,v) UN ARCO IN $E \cup E^T$
- SUPPONIAMO CHE:
  - (u,v) VENGA CANCELLATO NEL PASSAGGIO DA f_i A f_{i+1}
  - (u,v) RIAPPAIA NEL PASSAGGIO DA f_j A f_{j+1} $(j \geq i+1)$
  - (u,v) VENGA CANCELLATO NEL PASSAGGIO DA f_k A f_{k+1} $(k \geq j+1)$

$$\delta_{f_i}(s,v) = \delta_{f_i}(s,u)+1$$
$$\delta_{f_j}(s,u) = \delta_{f_j}(s,v)+1$$

- PERTANTO:

$$\begin{aligned}\delta_{f_j}(s,u) &= \delta_{f_j}(s,v)+1 \\ &\geq \delta_{f_i}(s,v)+1 \quad \text{(PER IL LEMMA PRECEDENTE)} \\ &= \delta_{f_i}(s,u)+2\end{aligned}$$

- ANCORA PER IL LEMMA PRECEDENTE SI HA:

$\delta_{f_k}(s,u) \geq \delta_{f_j}(s,u)$, DA CUI

$\delta_{f_k}(s,u) \geq \delta_{f_i}(s,u)+2$.

- POICHE' SE $\delta_{f_k}(s,u) \neq +\infty$, ALLORA $\delta_{f_k}(s,u) \leq |V|-1$ NE SEGUE CHE (u,v) PUO' ESSERE CANCELLATO AL PIÙ $O(V)$ VOLTE, DA CUI LA TESI ■

<u>TEOREMA</u> SU UNA RETE DI FLUSSO (G,c), CON $G=(V,E)$, L'ALGORITMO DI EDMONDS-KARP HA COMPLESSITA' $O(VE^2)$. ■

UN ESEMPIO IN CUI IL METODO DI FORD-FULKERSON <u>NON SI FERMA</u>

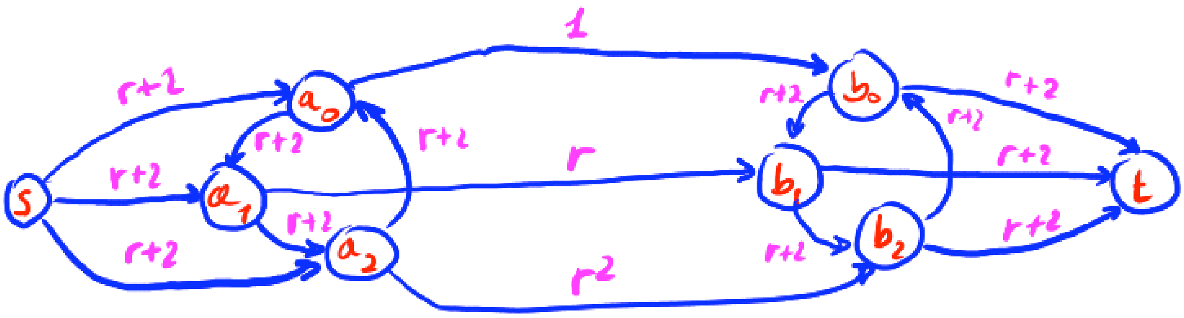
- SIA $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618\ldots$ LA RADICE POSITIVA DELL'EQUAZIONE $x^2 + x - 1 = 0$
- VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETA':
  - $r^2 = 1 - r$
  - $r^{n+2} = r^n - r^{n+1} \quad \forall n \geq 0$
  - $1 > r > r^2 > r^3 > \ldots$ (IN QUANTO $0 < r < 1$)
  - $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r} = r+2$

- VERIFICHIAMO CHE $\frac{1}{1-r} = r+2$.

INFATTI: $(1-r)(r+2) = r+2-r^2-2r$

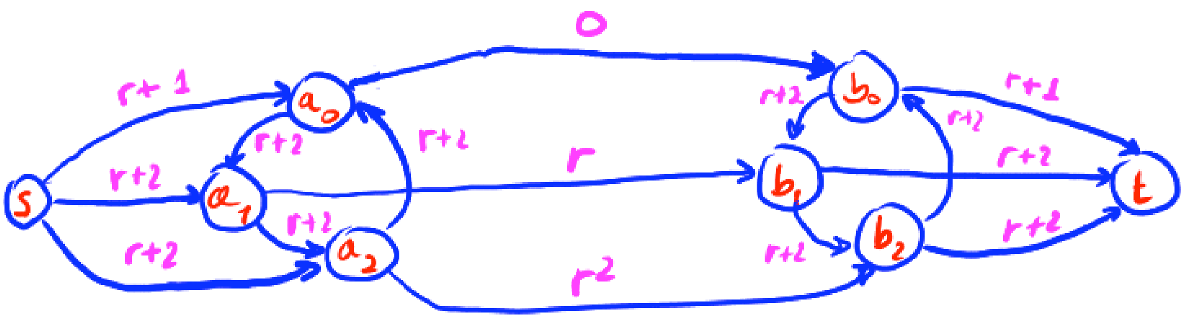
$= -r^2-r+2$

$= (r-1)-r+2 = 1$.

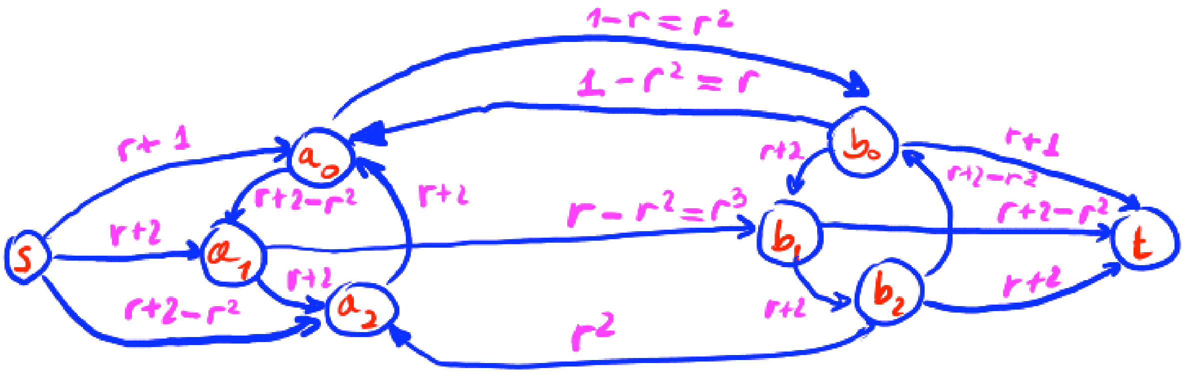


- CHIAMIAMO GLI ARCHI (a_0,b_0), (a_1,b_1), (a_2,b_2) CONDUTTURE
- $(\{s, a_0, a_1, a_2\}, \{b_0, b_1, b_2, t\})$ E' UN TAGLIO MINIMO, LA CUI CAPACITA' E' $1+r+r^2=2$

1° CAMMINO AUMENTANTE: (s, a_0, b_0, t)

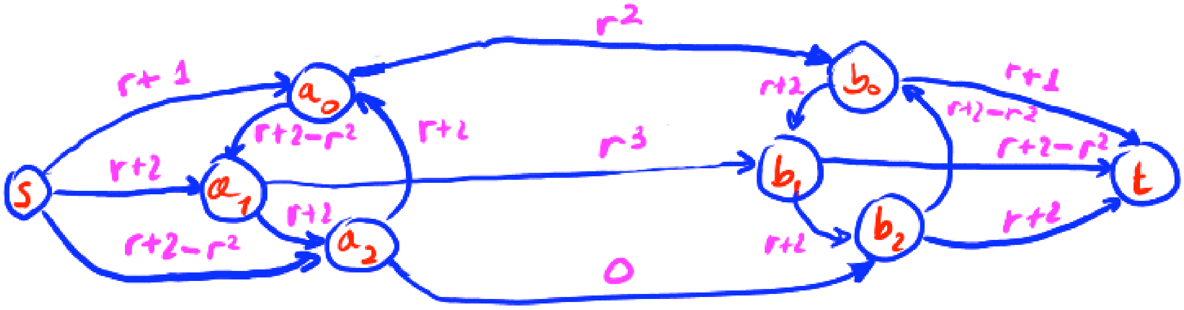


2° CAMMINO AUMENTANTE:
$(s, a_2, b_2, b_0, a_0, a_1, b_1, t)$



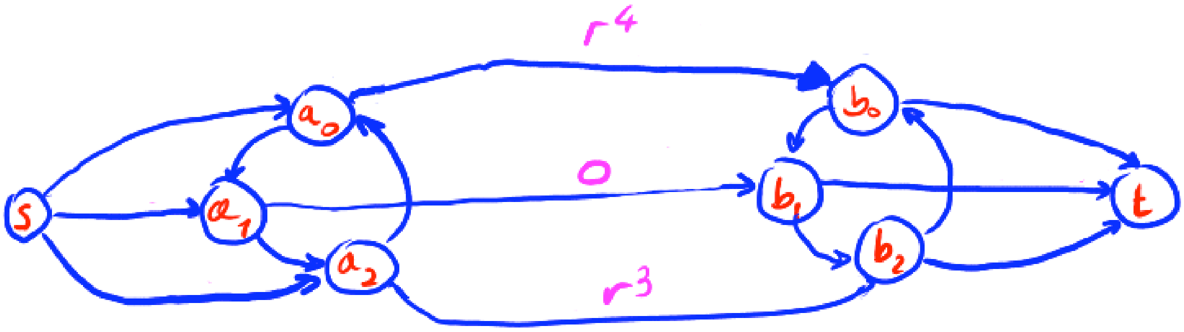
2° CAMMINO AUMENTANTE:

$(s, a_2, b_2, b_0, a_0, a_1, b_1, t)$



3° CAMMINO AUMENTANTE:

$(s, a_1, b_1, b_2, a_2, a_0, b_0, t)$



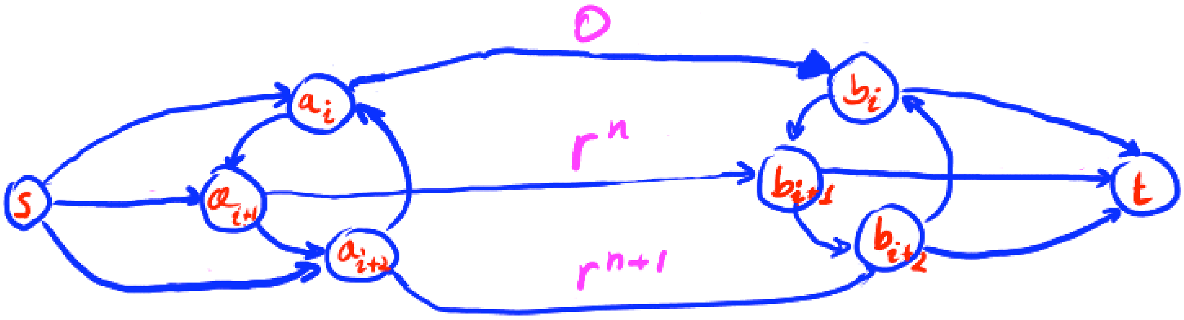
$0 \quad r^2 \quad r^4 \quad 0 \quad r^5$ $\qquad r^i \longrightarrow (2-i) \bmod 3$

$r \quad r^3 \quad 0 \quad r^4 \quad r^6 \quad \ldots 0$ $\qquad \longrightarrow (1-i) \bmod 3$

$r^2 \quad 0 \quad r^3 \quad r^5 \quad 0$ $\qquad r^{i+1} \longrightarrow -i \bmod 3$

DOPO n INCREMENTI DEL FLUSSO SI AVRA'

$i = (1-n) \bmod 3$



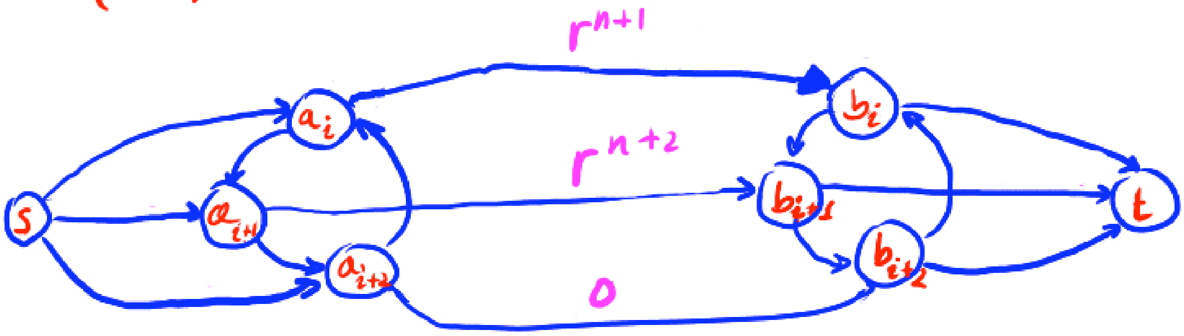
$(n+1)$-ESIMO CAMMINO AUMENTANTE:

$(s, a_{i+2}, b_{i+2}, b_i, a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, t)$

DI CAPACITA' RESIDUA r^{n+1}

DOPO $(n+1)$ INCREMENTI DEL FLUSSO SI AVRA'

$i = (1-n) \bmod 3$



$r^n \longrightarrow (2-n) \bmod 3$

$0 \longrightarrow (1-n) \bmod 3$

$r^{n+1} \longrightarrow -n \bmod 3$

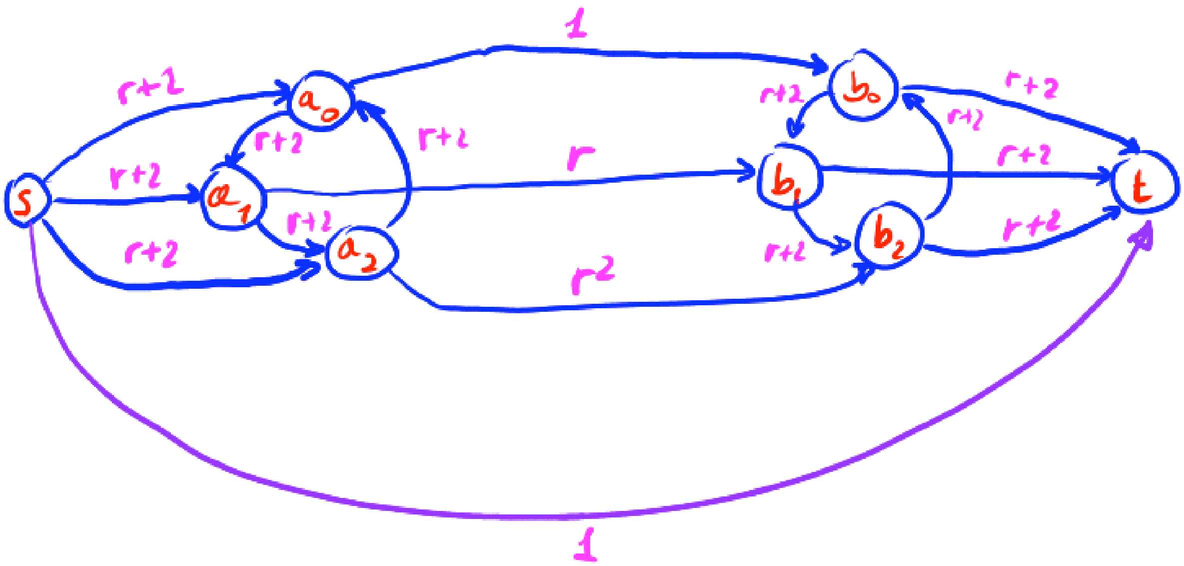
- PERTANTO, E' POSSIBILE AVERE UNA SEQUENZA INFINITA DI INCREMENTI

$$1 + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} r^i - r = \frac{1}{1-r} - r$$

$$= r+2-r = 2$$

- SI OSSERVI CHE IL LIMITE DEI FLUSSI E' IL FLUSSO MASSIMO.

- MA CIÒ E' NECESSARIAMENTE VERO IN TUTTI I CASI ?



- SU TALE RETE E' POSSIBILE DEFINIRE UNA SEQUENZA DI INCREMENTI CHE CONVERGE A 2, MENTRE IL FLUSSO MASSIMO SULLA RETE HA VALORE 3