Edge-connectivity

Sia $G = (V, E)$ un grafo non-orientato connesso.

L'EDGE-CONNECTIVITY di G è il minimo numero di archi che occorre rimuovere da G perché il grafo risultante sia non connesso.

Esempi:

- un grafo lineare ha edge-connectivity uguale a 1;
- un ciclo semplice ha edge-connectivity uguale a 2.

Un TAGLIO in $G = (V, E)$ è una partizione non banale $\langle V_1, V_2 \rangle$ di V.

La DIMENSIONE $|\langle V_1, V_2 \rangle|$ di un taglio $\langle V_1, V_2 \rangle$ è data dal numero di archi che lo attraversano, cioè:

$$|\langle V_1, V_2 \rangle| =_{Def} |\{(u, v) \in E \ : \ u \in V_1 \, , \ v \in V_2\}| \, .$$

Edge-connectivity e insiemi di 2-sconnessione

Dato un grafo $G = (V, E)$ non-orientato e connesso, un INSIEME DI 2-SCONNESSIONE PER G è un insieme $D \subseteq E$ *minimale* di archi tale che $(V, E \setminus D)$ abbia due componenti connesse.

Se (V_1, E_1) e (V_2, E_2) sono le due componenti connesse generate da un insieme di 2-sconnessione D, allora $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio di $G = (V, E)$ attraversato esattamente dagli archi in D.

Viceversa, se $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio di $G = (V, E)$, gli archi che lo attraversano formano un insieme di 2-sconnessione per G.

Quindi, in particolare, se $D^* \subseteq E$ è un insieme di 2-sconnessione di cardinalità minima, allora il taglio $\langle V_1^*, V_2^* \rangle$ corrispondente è un taglio minimo di $G = (V, E)$, cioè ha dimensione minima tra tutti i possibili tagli di G.

In altre parole, l'edge-connectivity di un grafo $G = (V, E)$ è uguale alla dimensione di un taglio minimo in $G = (V, E)$.

Come determinare un taglio minimo in un grafo non-orientato connesso?

Sia $\langle V_1, V_2 \rangle$ un taglio di $G = (V, E)$.

Sia $s \in V_1$ e $t \in V_2$ e si consideri la rete di flusso $(V, \vec{E}, s, t, c)$ a capacità unitaria indotta da G, s e t, così definita:

$$\begin{aligned} \vec{E} &=_{Def} \{(u, v) : (u, v) \in E \text{ oppure } (v, u) \in E\} \\ c(u, v) &=_{Def} 1\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in \vec{E}\,. \end{aligned}$$

Allora $\langle V_1, V_2 \rangle$ è un taglio nella rete di flusso $(V, \vec{E}, s, t, c)$, la cui capacità è uguale a $|\langle V_1, V_2 \rangle|$.

Quindi, un taglio minimo di $G = (V, E)$ corrisponde ad un taglio di capacità minima in una rete a capacità unitaria indotta da G.

Come determinare un taglio minimo in un grafo non-orientato connesso?

Si ha pertanto il seguente algoritmo:

CONSTRUCT-MINIMUM-CUT(V, E)

- sia $s \in V$

$\mathcal{T} := \langle\{s\}, V \setminus \{s\}\rangle$ -- *$\mathcal{T}$, inizializzato ad un taglio qualunque, conterrà il taglio minimo*

for $t \in V \setminus \{s\}$ **do**

- sia $(V, \vec{E}, s, t, c)$ la rete di flusso a capacità unitaria indotta da $G = (V, E)$ e $s, t \in V$

- si determini un taglio minimo $\langle V_1, V_2\rangle$ nella rete $(V, \vec{E}, s, t, c)$

if $|\langle V_1, V_2\rangle| < |\mathcal{T}|$ **then**

$\mathcal{T} := \langle V_1, V_2\rangle$

return $\mathcal{T}$

Complessità di CONSTRUCT-MINIMUM-CUT

La complessità di CONSTRUCT-MINIMUM-CUT è dominata dalle $\mathcal{O}(V)$ computazioni di tagli minimi nelle reti a capacità unaria $(V, \vec{E}, s, t, c)$, al variare di $t \in V \setminus \{s\}$.

Ad esempio, se tali computazioni vengono effettuate mediante l'algoritmo di Edmonds-Karp, si ottiene una complessità computazionale di $\mathcal{O}(V^2E^2)$.