ALBERI RICOPRENTI MINIMI
(MINIMUM SPANNING TREE)

PROBLEMA

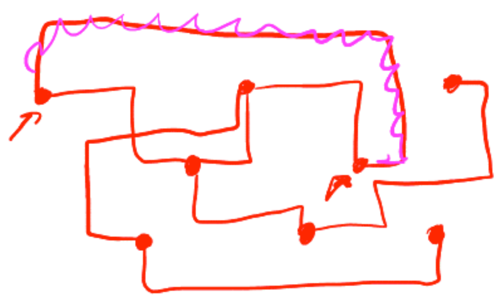
Input: - GRAFO NON ORIENTATO CONNESSO $G=(V,E)$
- UNA FUNZIONE PESO $w: E \to \mathbb{R}$

Output: - ALBERO $T=(V,E')$, CON $E' \subseteq E$, TALE CHE PER OGNI ALTRO ALBERO $T_1=(V,E'_1)$, CON $E'_1 \subseteq E$, SI ABBIA

$$w(T)=\sum_{e\in E'} w(e) \leq \sum_{e\in E'_1} w(e) = w(T_1)$$

APPLICAZIONI

- PROGETTAZIONE DI RETI
  (DI CALCOLATORI, CIRCUITI, ECC.)

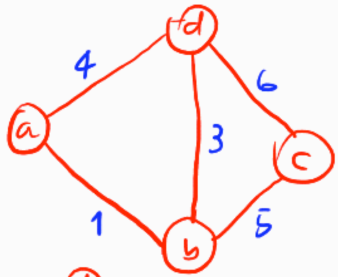


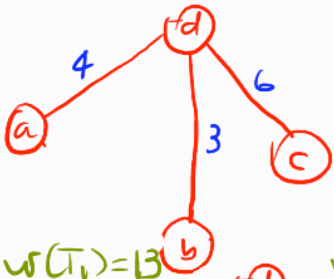
DATO UN GRAFO G: $\mathcal{V}[G]$ (VERTICI DI G)
$\mathcal{E}[G]$ (ARCHI DI G)

RICERCA ESAUSTIVA

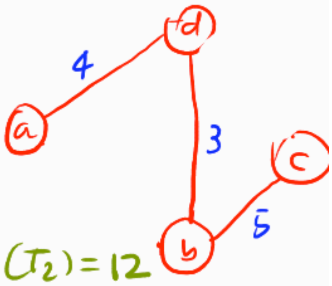
ELENCARE TUTTI GLI ALBERI RICOPRENTI E TRA QUESTI CERCARE QUELLO DI PESO MINIMO

G =

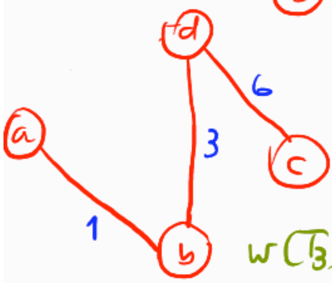




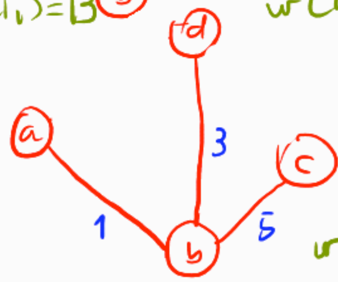
$w(T_1) = 13$



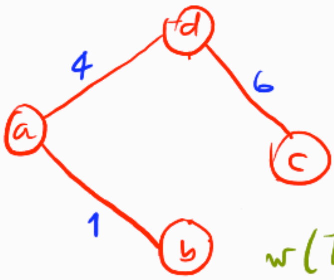
$w(T_2) = 12$



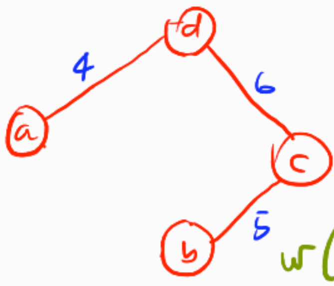
$w(T_3) = 10$



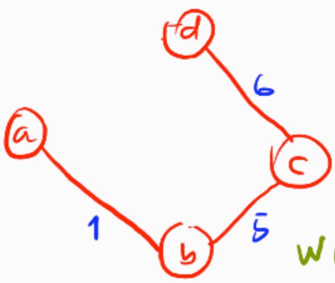
$w(T_4) = 9$



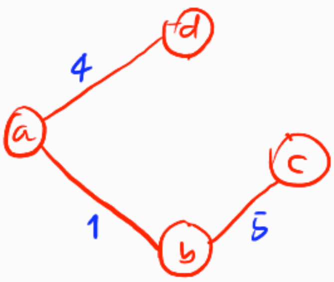
$w(T_5) = 11$



$w(T_6) = 15$



$w(T_7) = 12$



$w(T_8) = 10$

PERTANTO L' MST DI G E' L'ALBERO T_4 DI PESO 9

LA RICERCA ESAUSTIVA E' ESPONENZIALE
INFATTI IL NUMERO DI ALBERI RICOPRENTI
IN UN GRAFO COMPLETO SU n VERTICI
E' n^{n-2} (CAYLEY)

- DISCUTEREMO 3 ALGORITMI
  - BORŮVKA (1926)
  - KRUSKAL (1956)
  - PRIM (1957)
- SI TRATTA DI ALGORITMI GREEDY
- SONO BASATI SU UN PROCESSO DI COLORAZIONE CHE MANTIENE UN OPPORTUNO INVARIANTE
- A SECONDA DELL' EURISTICA UTILIZZATA NEL PROCESSO DI COLORAZIONE SI OTTERRANNO I TRE ALGORITMI DI SOPRA

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO CON FUNZIONE PESO $w: E \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE (TAGLIO)

UN TAGLIO DI G E' UNA PARTIZIONE (V_1,V_2) DI V NON BANALE (CIOE' TALE CHE $V_1 \neq \emptyset$ E $V_2 \neq \emptyset$)

UN ARCO (u,v) TALE CHE $u \in V_1$ E $v \in V_2$ SI DICE CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1,V_2)

PROCESSO DI COLORAZIONE

(INIZIALMENTE NESSUN ARCO E' COLORATO)

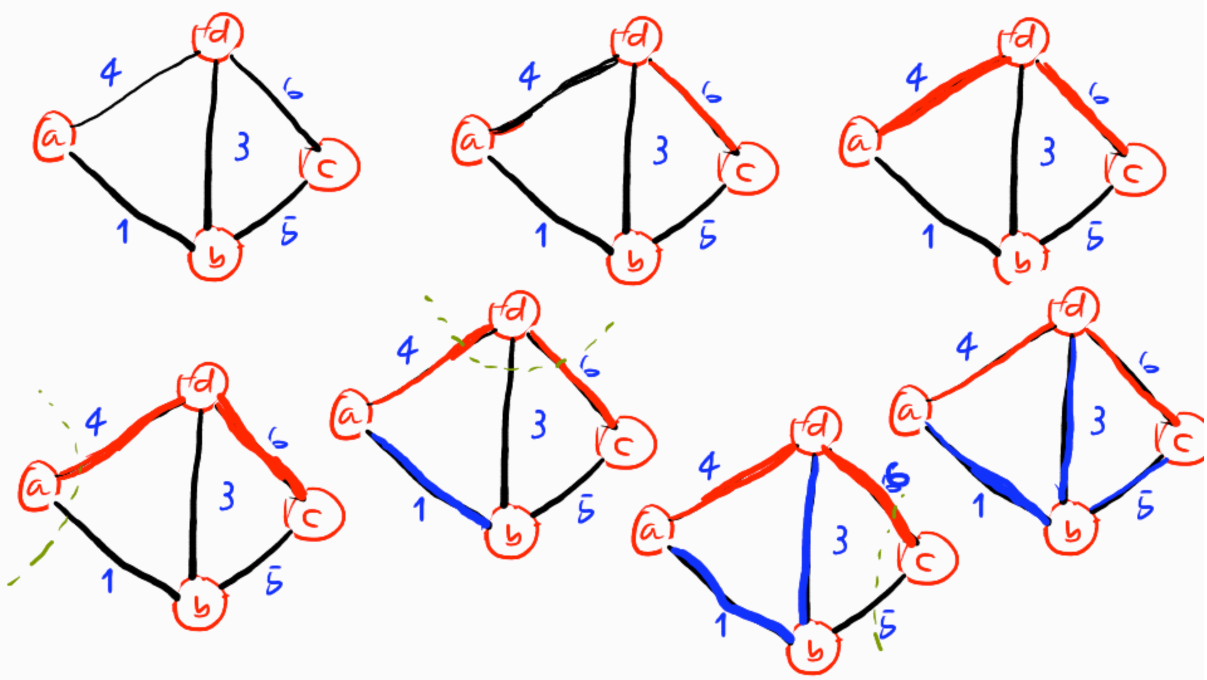
FINCHE' E' POSSIBILE, SI APPLICHI UNO DEI SEGUENTI DUE PASSI:

PASSO BLU

- SI SELEZIONI UN TAGLIO NON ATTRAVERSATO DA ALCUN ARCO BLU
- TRA GLI ARCHI NON COLORATI CHE ATTRAVERSANO IL TAGLIO SE NE SELEZIONI UNO DI PESO <u>MINIMO</u> E LO SI COLORI DI BLU

PASSO ROSSO

- SI SELEZIONI UN CICLO SEMPLICE PRIVO DI ARCHI ROSSI
- TRA GLI ARCHI NON COLORATI DEL CICLO SE NE SELEZIONI UNO DI PESO MASSIMO E LO SI COLORI DI ROSSO



DURANTE L'ESECUZIONE DEL PROCESSO DI COLORAZIONE VALE IL SEGUENTE INVARIANTE

INVARIANTE DEL COLORE

AD OGNI PASSO DELLA PROCEDURA DI COLORAZIONE ESISTE UN ALBERO RICOPRENTE MINIMO CONTENENTE TUTTI GLI ARCHI BLU E NESSUN ARCO ROSSO

TEOREMA

OGNI ESECUZIONE DEL PROCESSO DI COLORAZIONE COLORA TUTTI GLI ARCHI E MANTIENE L' INVARIANTE DEL COLORE

COROLLARIO

ALLA FINE DELLA PROCEDURA DI COLORAZIONE, L'INSIEME DEGLI ARCHI BLU FORMA UN MST

DIM. - SIA E' L'INSIEME DEGLI ARCHI BLU ALLA FINE DEL PROCESSO.

- SIA $T=(V,E'')$ UN MST TALE CHE $E' \subseteq E''$
  (ESISTE GRAZIE ALL'INVARIANTE DEL COLORE)
- POICHE' E'' NON CONTIENE ALCUN ARCO ROSSO, SI HA ANCHE $E'' \subseteq E'$, DA CUI $E' = E''$, E QUINDI (V, E') E' UN MST ∎

VERIFICHIAMO CHE L'INVARIANTE DEL COLORE E' MANTENUTO DOPO OGNI PASSO DI COLORAZIONE (PER INDUZIONE)

- INIZIALMENTE L'INVARIANTE DEL COLORE E' BANALMENTE VERIFICATO, IN QUANTO NON CI SONO NE' ARCHI BLU NE' ARCHI ROSSI
- SIA $T=(V,E')$ UN MST CHE CONTIENE TUTTI GLI ARCHI BLU AL PASSO k E NESSUN ARCO ROSSO (IPOTESI INDUTTIVA)

PASSO $k+1$

CASO: IL PASSO $k+1$ COLORA DI BLU L'ARCO $e=(u,v)$ CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1,V_2) PRIVO DI ARCHI BLU

SE $e\in T$, T VERIFICA L'INVARIANTE DEL COLORE AL PASSO $k+1$

SE $e\notin T$, SI CONSIDERI IL CAMMINO IN T DA u A v.

SIA (u_1,v_1) L'ARCO SU TALE CAMMINO CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1,V_2). ESSO E' NON COLORATO.

SI CONSIDERI T' TALE CHE

$$\mathcal{E}[T'] = (\mathcal{E}[T] \setminus \{(u_1,v_1)\}) \cup \{(u,v)\}$$

POICHE' $w(u,v) \leq w(u_1,v_1)$

SI HA $w(T') \leq w(T) \leq w(T')$

DA CUI $w(T')=w(T)$, CIOE' T' E' UN MST CONTENENTE TUTTI GLI ARCHI BLU AL PASSO $k+1$.

CASO: IL PASSO $k+1$ COLORA DI ROSSO L'ARCO $e=(u_1,u_2)$ RELATIVO AL CICLO SEMPLICE $(u_1,u_2,\dots,u_r,u_{r+1}=u_1)$

SE $e \notin T$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE.

SUPPONIAMO CHE $e \in T$.

$T \setminus \{e\}$ HA DUE COMPONENTI CONNESSE CHE DETERMINANO UNA PARTIZIONE (V_1,V_2) DI V.

SIA f UN ARCO SUL CAMMINO $(u_2,\dots,u_r,u_1)$, CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO (V_1,V_2).

SI NOTI CHE

- f NON PUÒ ESSERE BLU IN QUANTO $f \notin T$

- f NON PUÒ ESSERE ROSSO IN QUANTO IL CICLO SEMPLICE SCELTO PER EFFETTUARE IL $(k+1)$-ESIMO PASSO NON CONTIENE ARCHI ROSSI

$\therefore$ PERTANTO f NON È COLORATO

$\therefore$ $w(e) \geq w(f)$

SIA T'' TALE CHE $\mathcal{E}[T''] = \left(\mathcal{E}[T] \setminus \{e\}\right) \cup \{f\}$

$\therefore$ T'' È UNO SPANNING TREE

$\therefore$ $w(T) \leq w(T'') \leq w(T) \longrightarrow w(T'')=w(T)$

$\therefore$ T'' È UN MST CHE VERIFICA L'INVARIANTE DEL COLORE

LEMMA AL TERMINE DELL'ESECUZIONE DEL PROCESSO DI COLORAZIONE TUTTI GLI ARCHI SONO COLORATI

DIM
- SIA $e=(u,v)$ UN ARCO NON ANCORA COLORATO
- SIA T UN MST CHE VERIFICA L'INVARIANTE DEL COLORE
- SE $e \in T$, CANCELLANDO e DA T SI OTTENGONO DUE COMPONENTI CONNESSE CHE DETERMINANO UN TAGLIO (V_1, V_2)

$\therefore$ (V_1, V_2) NON È ATTRAVERSATO DA ALCUN ARCO BLU ED È ATTRAVERSATO DA ARCHI NON COLORATI

$\therefore$ PERTANTO È POSSIBILE APPLICARE UN PASSO BLU

- SE $e \notin T$, SIA $\pi_{u,v}$ IL CAMMINO DA u A v IN T
- SI CONSIDERI IL CICLO SEMPLICE $\pi_{u,v}; e$
- TALE CICLO NON CONTIENE ARCHI ROSSI ED INOLTRE CONTIENE ARCHI NON COLORATI

$\therefore$ PERTANTO È POSSIBILE APPLICARE UN PASSO ROSSO A TALE CICLO. ∎

TRE DIVERSE STRATEGIE DI COLORAZIONE

(I) BORŮVKA

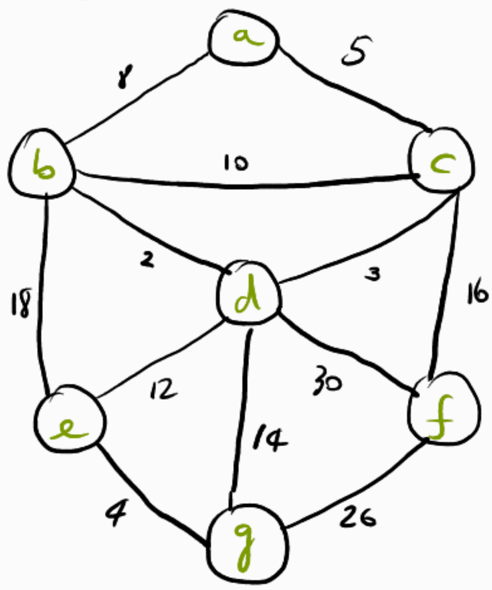
(SUPPONIAMO CHE GLI ARCHI SIANO ORDINATI TOTALMENTE DA UN ORDINAMENTO CHE E' IN ACCORDO CON QUELLO SUI PESI, CIOE'

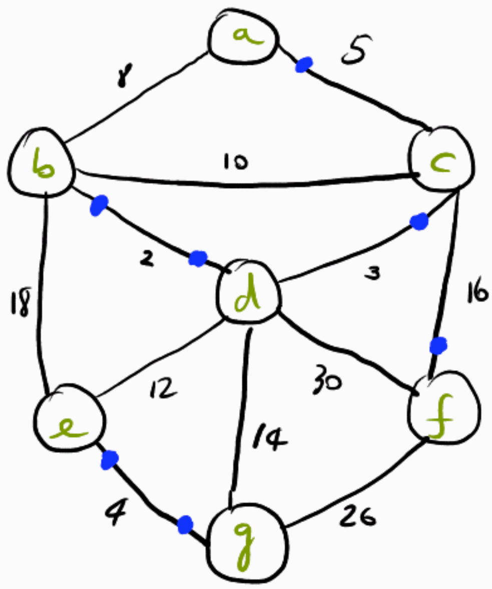
$w(e) < w(e') \longrightarrow e < e'$)

SI APPLICHI IL SEGUENTE PASSO SINCHE' E' POSSIBILE

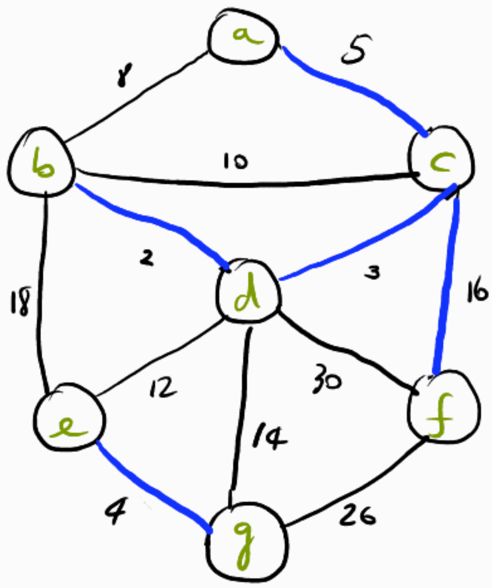
PER CIASCUN ALBERO BLU SI SELEZIONI L'ARCO INCIDENTE "MINIMO" NON ANCORA COLORATO.
SI COLORINO DI BLU GLI ARCHI SELEZIONATI
(SI COLORINO DI ROSSO GLI ARCHI NON ANCORA COLORATI)

ESEMPIO

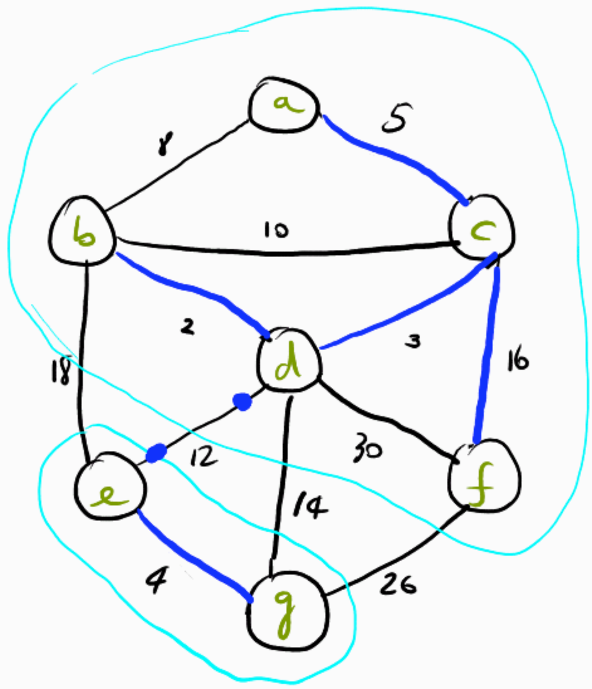




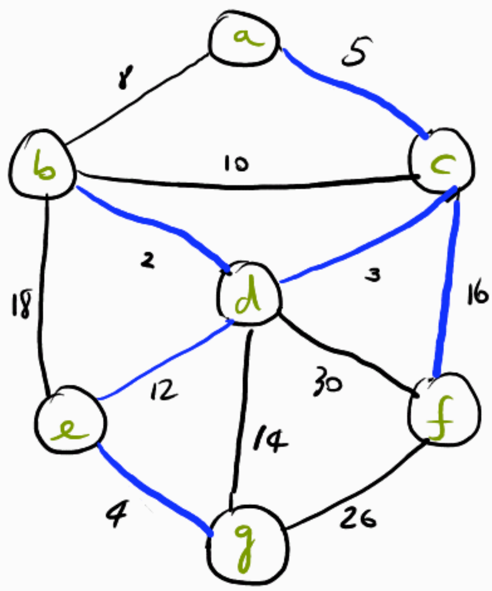
SELEZIONE



COLORAZIONE



SELEZIONE



COLORAZIONE

(II) ALGORITMO DI KRUSKAL

STRATEGIA

"SEGUENDO UN ORDINE NON DECRESCENTE PER COSTI, SE L'ARCO CORRENTE e E' CONTENUTO IN UN ALBERO BLU LO SI COLORI DI ROSSO, ALTRIMENTI LO SI COLORI DI BLU"

CORRETTEZZA DELL'ALGORITMO DI KRUSKAL

- SIA $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_{|E|})$ L'ORDINAMENTO PER PESI UTILIZZATO
- SIANO $op(e_1), op(e_2), \dots, op(e_{|E|})$ LE OPERAZIONI DI COLORAZIONE EFFETTUATE DALL'ALGORITMO DI KRUSKAL

PROCEDEREMO PER INDUZIONE SU $i = 1, \dots, |E|$

CASO: $op(e_i)$ COLORA e_i DI BLU

- SIA $e_i = (u_i, v_i)$.
- SI HA CHE u_i E v_i APPARTENGONO A DUE ALBERI BLU DISTINTI S_i E T_i
- SI CONSIDERI IL TAGLIO $(V[S_i], V \setminus V[S_i])$
- ESSO E' ATTRAVERSATO DALL'ARCO e_i
- SI OSSERVI CHE TUTTI GLI ARCHI e TALI CHE $w(e) < w(e_i)$ SONO GIÀ COLORATI
- PERTANTO e_i HA PESO MINIMO TRA TUTTI GLI ARCHI NON COLORATI CHE ATTRAVERSANO IL TAGLIO $(V[S_i], V \setminus V[S_i])$
- PERTANTO e_i PUÒ ESSERE COLORATO DA UN PASSO BLU

CASO: $op(e_i)$ COLORA e_i DI ROSSO

- SIA $e_i = (u_i, v_i)$.
- u_i E v_i APPARTENGONO AD UNO STESSO ALBERO BLU T
- SIA π IL CAMMINO DA u_i A v_i IN T
- SI CONSIDERI IL CICLO $\pi ; e$
- TALE CICLO NON CONTIENE ARCHI ROSSI ED INOLTRE e E' L'UNICO ARCO NON COLORATO
- PERTANTO E' POSSIBILE COLORARE L'ARCO e DI ROSSO MEDIANTE UN PASSO ROSSO

■

IMPLEMENTAZIONE DELL'ALGORITMO DI KRUSKAL

KRUSKAL (G, w)

$T := \emptyset$

<u>for</u> $v \in V$ <u>do</u>

  Makeset(v)

$E := $ SORT(E, w) /* E E' ORDINATO IN SENSO NON DECRESCENTE RISPETTO A w */

<u>for</u> $(u,v) \in E$ (SECONDO L'ORDINAMENTO DATO) <u>do</u>

  <u>if</u> Find_set$(u) \neq$ Find_set(v) <u>then</u>

    $T := T \cup \{(u,v)\}$

    Union(u,v)

<u>return</u> T

<u>COMPLESSITA'</u>

$$O(|E|\lg|V| + |E| \cdot \alpha(2|E| + 2|V| - 1, |V|))$$

INVERSA DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN

$$= O(|E| \cdot \lg|V|)$$

(III) ALGORITMO DI PRIM

STRATEGIA

- SI SELEZIONI UN NODO s
- SI ESEGUA $|V|-1$ VOLTE LA SEGUENTE OPERAZIONE
  - SI SELEZIONI L'ALBERO BLU T CONTENENTE s
  - SI SELEZIONI UN ARCO DI COSTO MINIMO INCIDENTE SU T E LO SI COLORI DI "BLU"

PRIM (G, w, s)

```
-- INIZIALIZZAZIONE
for v ∈ V[G] do
    k[v] := +∞
    pred[v] := NIL
k[s] := 0
Q := Build-Heap(V[G], k)
```

-- COSTRUZIONE

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$u := \text{Extract\_Min}(Q)$

for $v \in Adj[u]$ **do**

if $v \in Q$ **and** $w(u,v) < k[v]$ **then**

$\text{Decrease\_Key}(Q, v, w(u,v))$

$pred[v] := u$

return $\{(pred[v], v) : v \in V[G] \setminus \{s\}\}$

COMPLESSITA'

INIZIALIZZAZIONE: $O(V)$

COSTRUZIONE: $|V|$ Extract_Min

$|E|$ Decrease_Key

	heap binario	heap binom.	heap di Fibon.
INIZIALIZZAZIONE	$O(V)$	$O(V \lg V)$	$O(V)$
$\|V\|$ Extract_Min	$O(V \lg V)$	$O(V \lg V)$	$O(V \lg V)$
$\|E\|$ Decrease_Key	$O(E \lg V)$	$O(E \lg V)$	$O(E)$
	$O(E \lg V)$	$O(E \lg V)$	$O(E + V \lg V)$

CONFRONTO TRA $E \lg V$ ED $E + V \lg V$

$$\frac{E + V\lg V}{E \lg V} = \frac{E}{E\lg V} + \frac{V \lg V}{E \lg V} = \frac{1}{\lg V} + \frac{V}{E} < 2 + \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $E + V \lg V = O(E \lg V)$

$$\lim_{V\to\infty} \frac{E + V\lg V}{E\lg V} = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{\lg V} + \lim_{V\to\infty} \frac{V}{E} = \lim_{V\to\infty} \frac{V}{E}$$

SE $V = o(E)$, ALLORA $E + V\lg V = o(E \lg V)$

PROPRIETA' SIA $G = (V,E)$ UN GRAFO NON ORIENTATO E CONNESSO CON FUNZIONE PESO $w : E \to \mathbb{R}$ INIETTIVA.
ALLORA G HA UN UNICO MST.

DIM SIANO $T_1 \neq T_2$ DUE MST DI G.
SIA $(u,v) \in \mathcal{E}[T_1] \,\Delta\, \mathcal{E}[T_2]$ DI PESO MINIMO.
SUPPONIAMO CHE $(u,v) \in \mathcal{E}[T_1] \setminus \mathcal{E}[T_2]$.
SIA π UN CAMMINO DA u A v IN T_2.
OVVIAMENTE $\pi \not\subseteq T_1$.
SIA $(u',v') \in (\mathcal{E}[T_2] \setminus \mathcal{E}[T_1]) \cap \pi \subseteq \mathcal{E}[T_1] \,\Delta\, \mathcal{E}[T_2]$.
PERTANTO $w(u',v') > w(u,v)$.
SIA $T_2' = T_2 \setminus \{(u',v')\} \cup \{(u,v)\}$. SI HA T_2' E' UN ALBERO.
INOLTRE $w(T_2') = w(T_2) - w(u',v') + w(u,v) < w(T_2)$, ASSURDO. ∎