SPLAY TREES

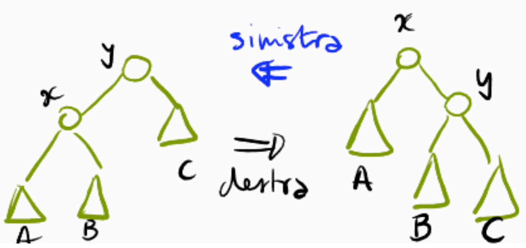
- GLI SPLAY TREES IMPLEMENTANO M OPERAZIONI CONSECUTIVE DI
  - RICERCA
  - INSERIMENTO
  - CANCELLAZIONE

  IN TEMPO $O(M \log N)$, DOVE N E' IL NUMERO DI INSERIMENTI
- IN ALTRE PAROLE CIASCUNA DELLE M OPERAZIONI VIENE ESEGUITA IN TEMPO AMMORTIZZATO $O(\log N)$

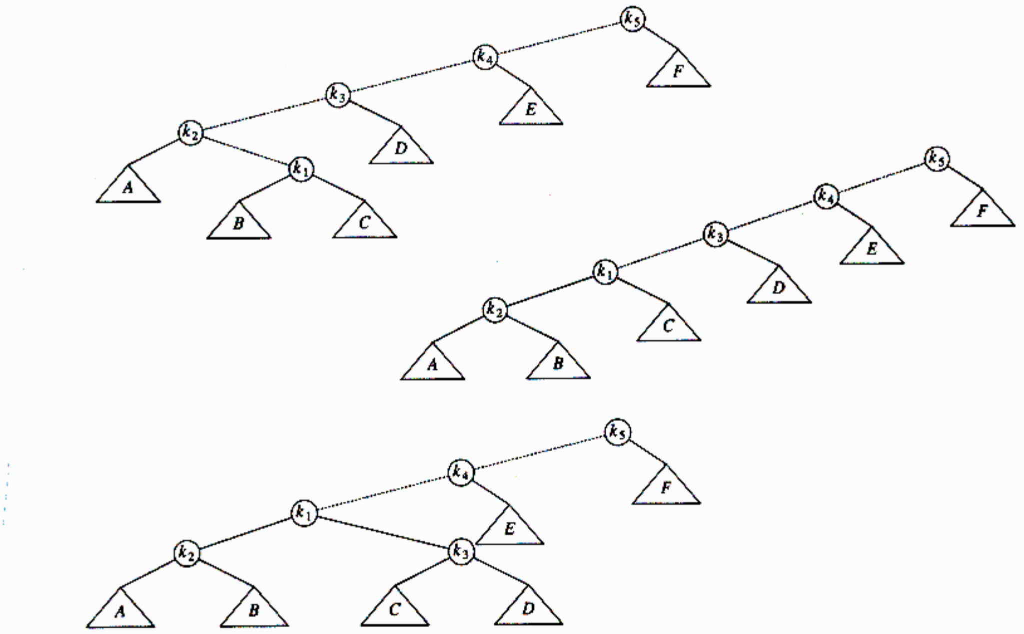
IDEA: PER QUANTO POSSIBILE AVVICINARE ALLA RADICE I NODI CHE SI INCONTRANO DURANTE UN ACCESSO

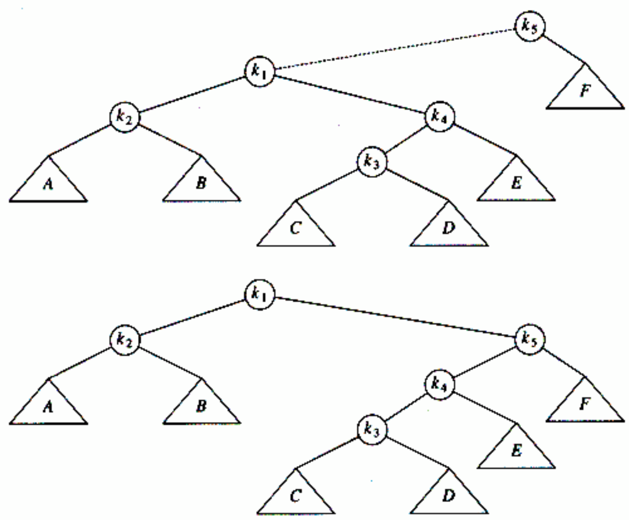
UNA SEMPLICE IDEA (CHE NON FUNZIONA)

EFFETTUARE TUTTE LE POSSIBILI ROTAZIONI, DAL BASSO VERSO L'ALTO, LUNGO IL CAMMINO DI ACCESSO



ESEMPIO (ACCESSO AL NODO k_1)





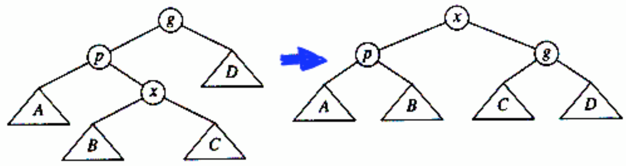
ESEMPIO

SI CONSIDERI LA SEQUENZA DELLE SEGUENTI OPERAZIONI:

$$\left.\begin{array}{l} \text{INSERT}(1) \\ \text{INSERT}(2) \\ \vdots \\ \text{INSERT}(N) \end{array}\right\} \Theta(N)$$

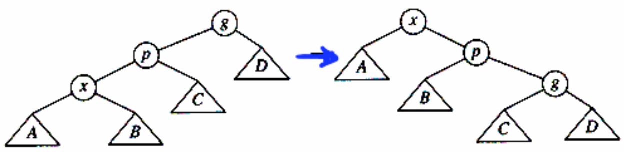
$$\left.\begin{array}{lll} \text{SEARCH}(1) & N-1 & \text{ROTAZ.} \\ \text{SEARCH}(2) & N-1 & \text{"} \\ \text{SEARCH}(3) & N-2 & \text{"} \\ \text{SEARCH}(4) & N-3 & \text{"} \\ \vdots & & \\ \text{SEARCH}(N) & 1 & \text{"} \end{array}\right\} \Theta(N^2)$$

SPLAY TREES



ZIG-ZAG

+ SIMMETRICHE



ZIG-ZIG

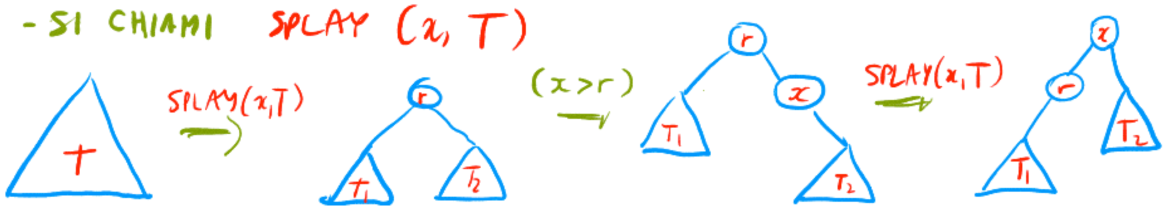
ZIG (x NON HA NONNO)

SPLAY (x, T)

- SI CERCHI x SU T MEDIANTE RICERCA BINARIA
- A PARTIRE DAL NODO OVE LA RICERCA SI E' FERMATA E PROCEDENDO VERSO LA RADICE, SI APPLICHINO LE ROTAZIONI DI TIPO ZIG, ZIG-ZAG O ZIG-ZIG NECESSARIE

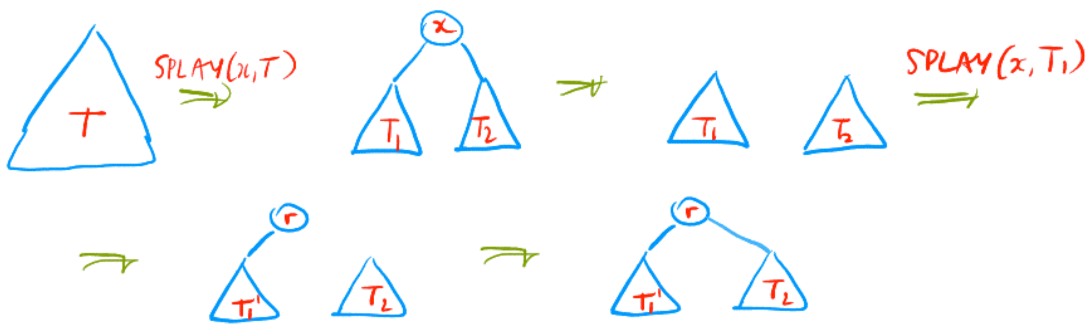
INSERT (x, T)

- SI CHIAMI SPLAY (x, T)
- SI INSERISCA IL NUOVO NODO x
- SI CHIAMI SPLAY (x, T)



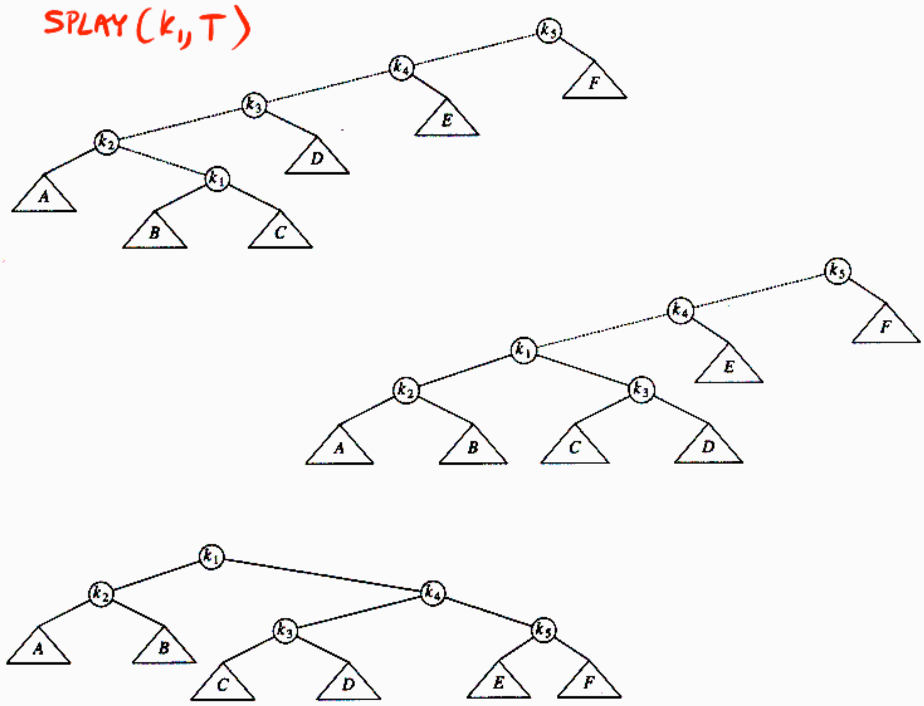
DELETE (x, T)

- SPLAY (x, T)
- SI CANCELLI IL NODO x OTTENENDO DUE ALBERI T_1 E T_2
- SPLAY (x, T_1); SIA r LA NUOVA RADICE
- SI PONGA LA RADICE DI T_2 COME FIGLIO DESTRO DEL NODO r



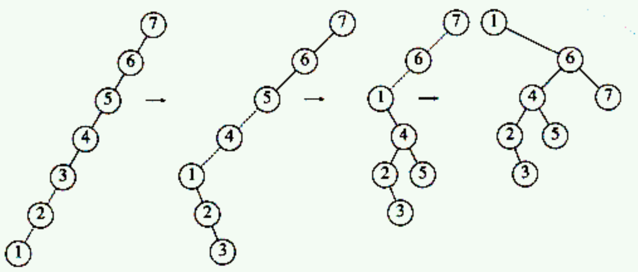
ESEMPIO

SPLAY (k_1, T)

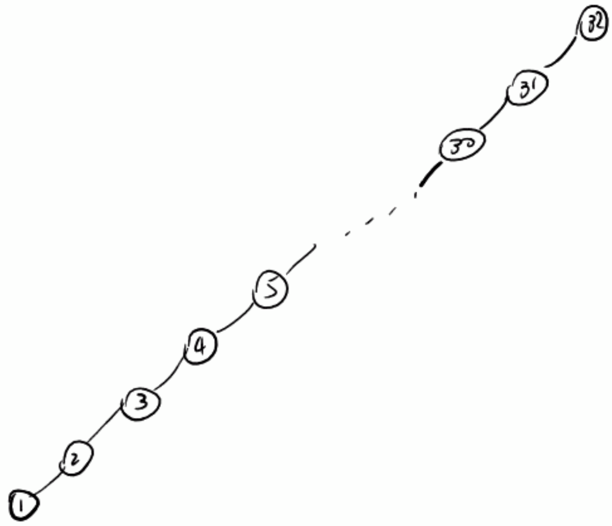


ESEMPIO

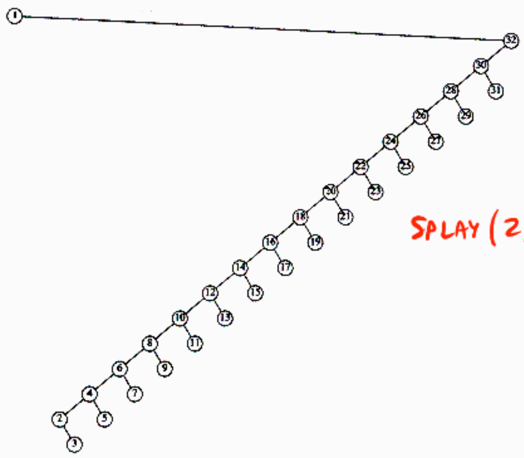
SPLAY (1, T)



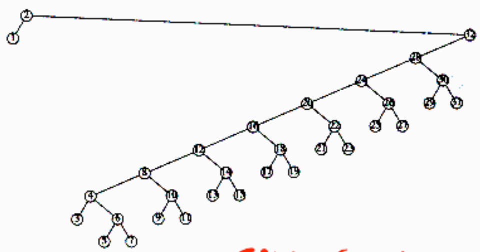
ESEMPIO



SPLAY (1, T) $\Rightarrow$

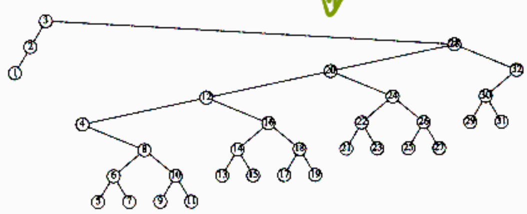


SPLAY (2, T) $\Rightarrow$

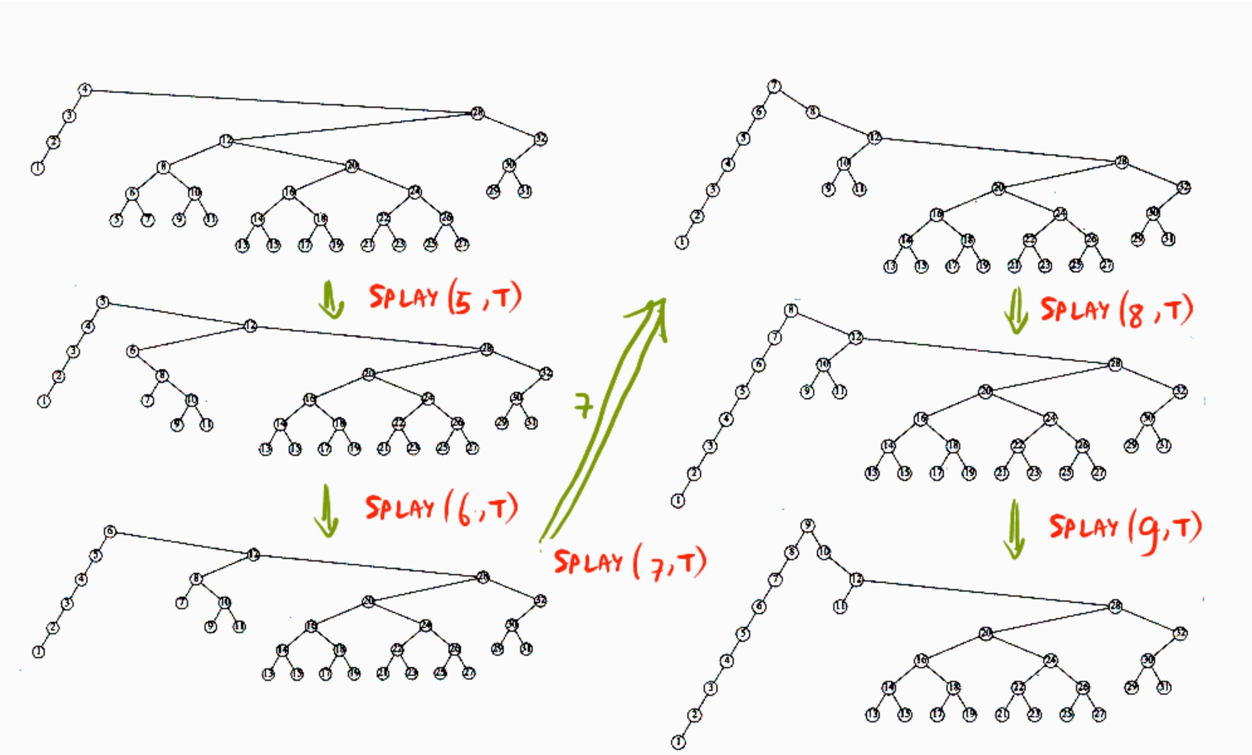


SPLAY (3, T)

$\Downarrow$



SPLAY (4, T) $\Rightarrow$



ANALISI AMMORTIZZATA DELL'OPERAZIONE SPLAY

COSTI DELLE OPERAZIONI ELEMENTARI

ZIG	1 ROTAZIONE
ZIG-ZAG	2 ROTAZIONI
ZIG-ZIG	2 ROTAZIONI

PONIAMO:

$$S(v) =_{df} \# \text{ NODI DEL SOTTOALBERO CON RADICE } v$$

$$R(v) =_{df} \lg S(v) \qquad \text{(rango di } v\text{)}$$

$$\Phi(T) =_{df} \sum_{v \in T} R(v)$$

- SIA T_0 UN ALBERO VUOTO. SI HA

$$\Phi(T_0) = \sum_{v \in T_0} R(v) = 0$$

- SIA T UN ALBERO QUALSIASI

$$\Phi(T) = \sum_{v \in T} R(v) = \sum_{v \in T} \lg S(v) \geq 0 = \Phi(T_0)$$

- PERTANTO POSSIAMO UTILIZZARE IL POTENZIALE $\Phi(T)$ PER CALCOLARE UN UPPER BOUND AL COSTO REALE DI M OPERAZIONI (SPLAY, INSERT, DELETE) DI CUI N SONO INSERT

LEMMA

SIANO $a, b \in \mathbb{N}^+$ E SIA $c \geq a+b$.

ALLORA $\lg a + \lg b \leq 2 \lg c - 2$.

DIM.

SI OSSERVI

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$c \geq 2\sqrt{ab} \qquad \text{(POICHE' } c \geq a+b\text{)}$$

$$\lg c \geq 1 + \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) \qquad \text{(PRENDENDO I LOGARITMI DI AMBO I MEMBRI)}$$

$$2\lg c - 2 \geq \lg a + \lg b \; . \blacksquare$$

TEOREMA IL COSTO AMMORTIZZATO DELL'OPERAZIONE SPLAY(x,T) E' AL PIÙ $3(R(root(T)) - R(x)) + 1$.

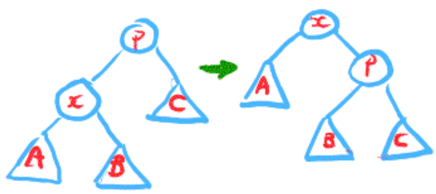
DIM. CALCOLIAMO PER INIZIARE IL COSTO AMMORTIZZATO DI UNA OPERAZIONE DI TIPO ZIG, ZIG-ZAG, ZIG-ZIG.

NOTAZIONE

INDICHIAMO CON $S_i(x)$ E $S_f(x)$ IL NUMERO DI NODI NEL SOTTOALBERO DI RADICE x PRIMA E DOPO L'OPERAZIONE IN ESAME.

ANALOGAMENTE PER $R_i(x)$ E $R_f(x)$.

CASO ZIG



COSTO REALE = 1

$$\Delta\Phi = R_f(x) + R_f(p) - R_i(x) - R_i(p)$$

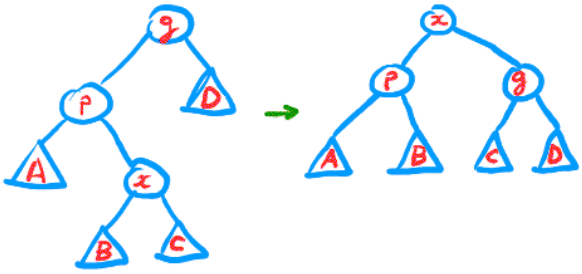
SI OSSERVI CHE

$S_i(p) \geq S_f(p) \longrightarrow R_i(p) \geq R_f(p) \longrightarrow \Delta\Phi \leq R_f(x) - R_i(x)$

$S_f(x) \geq S_i(x) \longrightarrow R_f(x) - R_i(x) \geq 0 \longrightarrow \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$

$$\hat{c}_{ZIG} = 1 + \Delta\Phi \leq 1 + 3(R_f(x) - R_i(x))$$

CASO ZIG-ZAG



COSTO REALE = 2

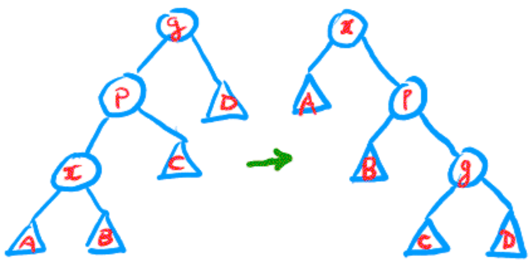
$\Delta\Phi = R_f(x,p,g) - R_i(x,p,g)$

SI OSSERVI QUANTO SEGUE:

- $S_f(x) = S_i(g) \to R_f(x) = R_i(g) \to \Delta\Phi = R_f(p,g) - R_i(x,p)$
- $S_i(p) \geq S_i(x) \to R_i(p) \geq R_i(x) \to \Delta\Phi \leq R_f(p,g) - 2R_i(x)$
- $S_f(p) + S_f(g) \leq S_f(x) \to R_f(p) + R_f(g) \leq 2R_f(x) - 2$
  $\to \Delta\Phi \leq 2(R_f(x) - R_i(x)) - 2$
- $S_f(x) \geq S_i(x) \to R_f(x) - R_i(x) \geq 0 \to \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2$

$\hat{C}_{ZIG-ZAG} = 2 + \Delta\Phi \leq 2 + 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2 = 3(R_f(x) - R_i(x))$.

CASO ZIG-ZIG



COSTO REALE = 2

$\Delta\Phi = R_f(x,p,g) - R_i(x,p,g)$

SI OSSERVI CHE:

- $S_f(x) = S_i(g) \to R_f(x) = R_i(g) \to \Delta\Phi = R_f(p,g) - R_i(x,p)$
- $S_f(x) \geq S_f(p) \to R_f(x) \geq R_f(p) \to \Delta\Phi \leq R_f(x,g) - R_i(x,p)$
- $S_i(x) + S_f(g) \leq S_f(x) \to R_i(x) + R_f(g) \leq 2R_f(x) - 2$
  $\to \Delta\Phi \leq R_f(x) + R_f(g) - 2R_i(x) - R_i(p) + R_i(x) \leq 3R_f(x) - 2 - 2R_i(x) - R_i(p)$
- $S_i(x) \leq S_i(p) \to R_i(x) \leq R_i(p) \to \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) - 2$

$\hat{C}_{ZIG-ZIG} = 2 + \Delta\Phi \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$.

RIASSUMENDO

$\hat{c}_{ZIG} \leq 3(R_f(x) - R_i(x)) + 1$

$\hat{c}_{ZIG-ZAG}, \ \hat{c}_{ZIG-ZIG} \leq 3(R_f(x) - R_i(x))$

$$\hat{c}_{SPLAY} = \sum_{j=1}^{k} \hat{c}_j \leq \sum_{j=1}^{k} 3(R_f^{(j)}(x) - R_i^{(j)}(x)) + 1$$

MA $R_f^{(j)}(x) = R_i^{(j+1)}(x)$ QUINDI

$$\begin{aligned}\hat{c}_{SPLAY} &\leq \sum_{j=1}^{k} 3(R_i^{(j+1)}(x) - R_i^{(j)}(x)) + 1 \\ &\leq 3(R_i^{(k+1)}(x) - R_i^{(1)}(x)) + 1 \\ &= 3(R(root(T)) - R(x)) + 1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

SI OSSERVI CHE

$$3(R(root(T)) - R(x)) + 1 = O(\lg|T|)$$