TABELLE DINAMICHE

- SI TRATTA DI TABELLE SOGGETTE A RIALLOCAZIONE PER RISOLVERE GLI OVERFLOW
- SIA T UNA TABELLA. PONIAMO:

size[T] $=_{def}$ DIMENSIONE DELLA TABELLA

num[T] $=_{def}$ NUMERO DEGLI ELEMENTI IN T

$$\alpha(T) =_{def} \begin{cases} \dfrac{num[T]}{size[T]} & \text{SE } size[T] > 0 \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

(FATTORE DI CARICO)

Table-Insert (T, x)
<u>if</u> size[T] = 0 <u>then</u>
- si allochi Table[T] di dimensione 1
- size[T] := 1

<u>if</u> num[T] = size[T] <u>then</u>
- si allochi in new_table una tabella di dim. 2 · size[T]
- si copi Table[T] in new_table
- si deallochi Table[T]
- Table[T] := new_table
- size[T] := 2 * size[T]

- si inserisca x in Table[T]
- num[T] := num[T] + 1

ANALISI DI n INSERIMENTI SU UNA TABELLA INIZIALMENTE NULLA

(I COSTI SONO VALUTATI IN TERMINI DI INSERIMENTI ELEMENTARI)

ANALISI GROSSOLANA

$n = 2^k$ INSERIMENTI

COSTO DELL'INSERIMENTO $(2^{k-1}+1)$-ESIMO $= 2^{k-1}+1$
$= \frac{n}{2}+1$

COSTO DI UN INSERIMENTO $= O(n)$

COSTO DI n INSERIMENTI $= O(n^2)$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

INSERIMENTO	COSTO
1	1
2	2
3	3
4	1
5	5
6	1
7	1
8	1
9	9

$$c_i = \begin{cases} i & \text{SE } i-1 = 2^k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{i-1 \text{ POTENZA DI } 2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{i-1 \text{ NON POTENZA DI } 2}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} j}_{j \text{ POTENZA DI } 2} + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \left(1+2+2^2+\dots+2^k\right) + n \qquad (\text{CON } 2^k \le n-1 < 2^{k+1})$$

$$k \le \lg(n-1) < k+1$$

$$k = \lfloor \lg(n-1) \rfloor$$

$$= \left(1+2+2^2+\dots+2^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor}\right) + n$$

$$= \left(2^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor + 1} - 1\right) + n$$

$$\le \left(2^{\lg(n-1)+1} - 1\right) + n = 2(n-1) - 1 + n = 3n - 3$$

ANALISI CON IL METODO DEGLI ACCANTONAMENTI

$\hat{c}_{ins} = 3$
- 1 UNITA' PER IL COSTO REALE
- 1 UNITA' PER PAGARE IL COSTO DELLA COPIA
- 1 UNITA' PER PAGARE IL COSTO DELLA COPIA DI UN ELEMENTO GIA' RICOPIATO

SI OSSERVI CHE:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

PERTANTO

$$T(n) \le 3n$$

ANALISI CON IL METODO DEL POTENZIALE

$\Phi(T) = 2 \cdot num[T] - size[T]$

SI HA: $\Phi(T_0) = 0$ (T_0 TABELLA VUOTA)

INOLTRE: $\frac{1}{2} size[T] \leq num[T]$

E PERTANTO $\Phi(T) \geq 0 = \Phi(T_0)$

CIOÈ IL METODO DEL POTENZIALE PUÒ ESSERE UTILIZZATO PER VALUTARE I COSTI AMMORTIZZATI

INSERIMENTO SENZA ESPANSIONE

$$\begin{aligned}\hat{c}_{ins} &= c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (2 \cdot n_i - s_i) - (2n_{i-1} - s_{i-1}) \\ &= 1 + 2(\cancel{n_{i-1}} + 1) - \cancel{s_{i-1}} - 2\cancel{n_{i-1}} + \cancel{s_{i-1}} \\ &= 3\end{aligned}$$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

INSERIMENTO CON ESPANSIONE

$$\begin{aligned}\hat{c}_{ins} &= c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= n_i + (2 \cdot n_i - s_i) - (2n_{i-1} - s_{i-1}) \\ &= \cancel{n_{i-1}} + 1 + 2(\cancel{n_{i-1}} + 1) - 2\cancel{n_{i-1}} - \cancel{2n_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}} \\ &= 3\end{aligned}$$

$s_i = 2s_{i-1} = 2n_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

PERTANTO $T(n) \leq 3n$

TABELLE DINAMICHE CON INSERIMENTI E CANCELLAZIONI

SI CONSIDERI LA SEGUENTE SEQUENZA DI OPERAZIONI SU UNA TABELLA DINAMICA CHE SI DIMEZZA QUANDO IL FATTORE DI CARICO SCENDE AL DI SOTTO DI $1/2$.

$n = 2^k$

$$\underbrace{I\ I\ \dots\ I}_{2^{k-1}}\ \overbrace{I\ C\ C\ I\ I\ C\ C\ I\ I\ \dots}^{2^{k-1}}$$

$s = 2^k$ $\quad$ $s = 2^{k-1}$

$n = s = 2^{k-1}$ $\quad$ $2^{k-1} = m$

$T(2^{k-1}) \le 3 \cdot 2^{k-1}$

$$2^{k-1} \left\{ \begin{array}{lll} c_{m+1} & = m+1 & \text{(ESPANSIONE)} \\ c_{m+2} & = 1 & \\ c_{m+3} & = m & \text{(CONTRAZIONE)} \\ c_{m+4} & = 1 & \\ c_{m+5} & = m+1 & \text{(ESPANSIONE)} \end{array} \right.$$

$\frac{n^2}{8} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} = 2^{k-1} \cdot 2^{k-2} = m \cdot 2^{k-2}$

COSTO REALE $\Theta(n^2)$

CI ACCONTENTIAMO DI AVERE $\alpha(T) \ge \frac{1}{4}$

PONIAMO:

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2\,num[T] - size[T] & \text{SE } \alpha(T) \ge \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} size[T] - num[T] & \text{SE } \alpha(T) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

OSSERVIAMO CHE SE $\alpha(T) = \frac{1}{2}$:

- $\frac{num[T]}{size[T]} = \frac{1}{2}$, CIOE' $\frac{1}{2} size[T] - num[T] = 0$
- $\Phi(T) = 2\,num[T] - size[T] = 0$. PERTANTO

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2\,num[T] - size[T] & \text{SE } \alpha(T) \ge \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} size[T] - num[T] & \text{SE } \alpha(T) \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

CASO $\alpha(T) < \frac{1}{2}$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{ins} &= c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= 1 + \left(\tfrac{1}{2}s_i - n_i\right) - \left(\tfrac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right) \\
&= \cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} - \cancel{n_{i-1}} - \cancel{1} - \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

CASO $\alpha(T) > \frac{1}{2}$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} - 1$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{canc} &= c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= 1 + 2n_i - s_i - (2n_{i-1} - s_{i-1}) \\
&= 1 + \cancel{2n_{i-1}} - 2 - \cancel{s_{i-1}} - \cancel{2n_{i-1}} + \cancel{s_{i-1}} \\
&= -1
\end{aligned}$$

CASO $\frac{1}{4} < \alpha(T) \leq \frac{1}{2}$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} - 1$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{canc} &= c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}s_i - n_i - \left(\tfrac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right) \\
&= 1 + \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} - \cancel{n_{i-1}} + 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

CASO $\alpha(T) = \frac{1}{4}$

$s_i = \frac{s_{i-1}}{2}$

$n_i = n_{i-1} - 1$

$n_{i-1} = \frac{1}{4}s_{i-1}$

$n_i = \frac{1}{4}s_{i-1} - 1$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{canc} &= c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= n_{i-1} + \tfrac{1}{2}s_i - n_i - \left(\tfrac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right) \\
&= \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} + \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} - \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} + 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} + \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

PERTANTO $\hat{c}_{ins} \leq 3$

$\hat{c}_{canc} \leq 2$

DA CUI $T(n) \leq 3n$