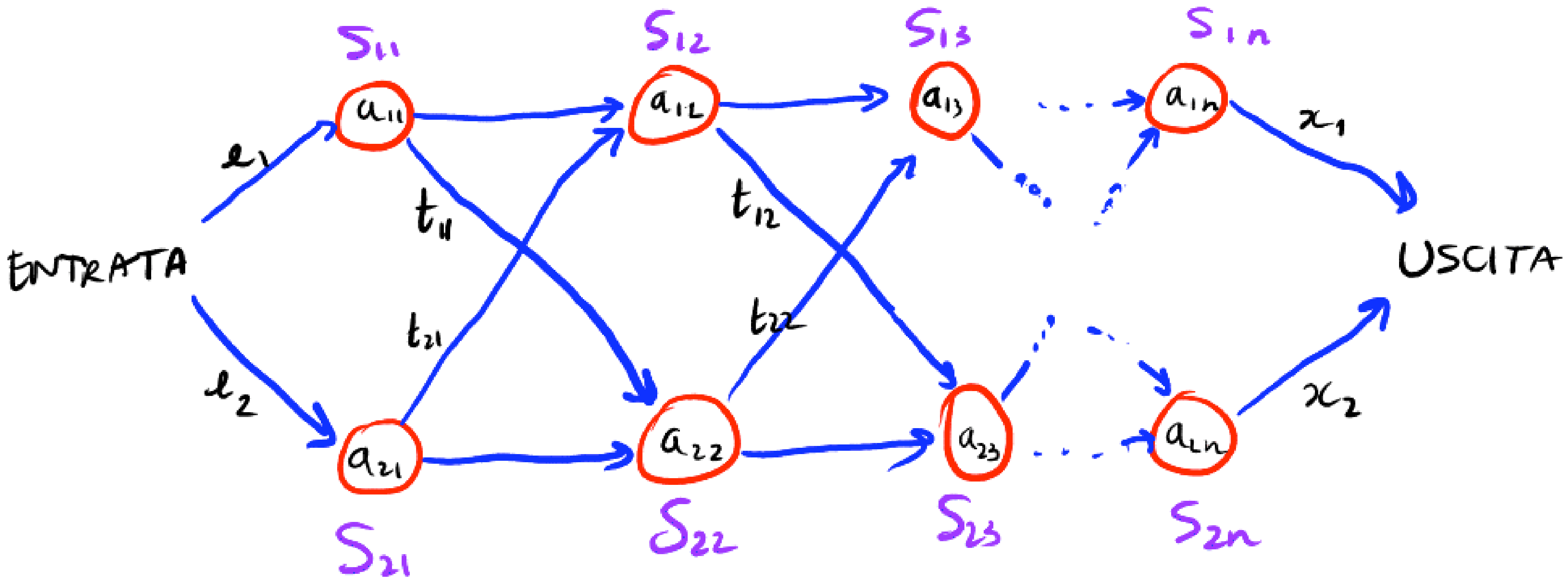
PROGRAMMAZIONE DINAMICA

UN PROBLEMA DI SCHEDULAZIONE IN UNA LINEA DI ASSEMBLAGGIO

- SUPPONIAMO DI AVERE UN' INDUSTRIA AUTOMOBILISTICA CON DUE DIVERSE LINEE D'ASSEMBLAGGIO COSÌ CARATTERIZZATE:



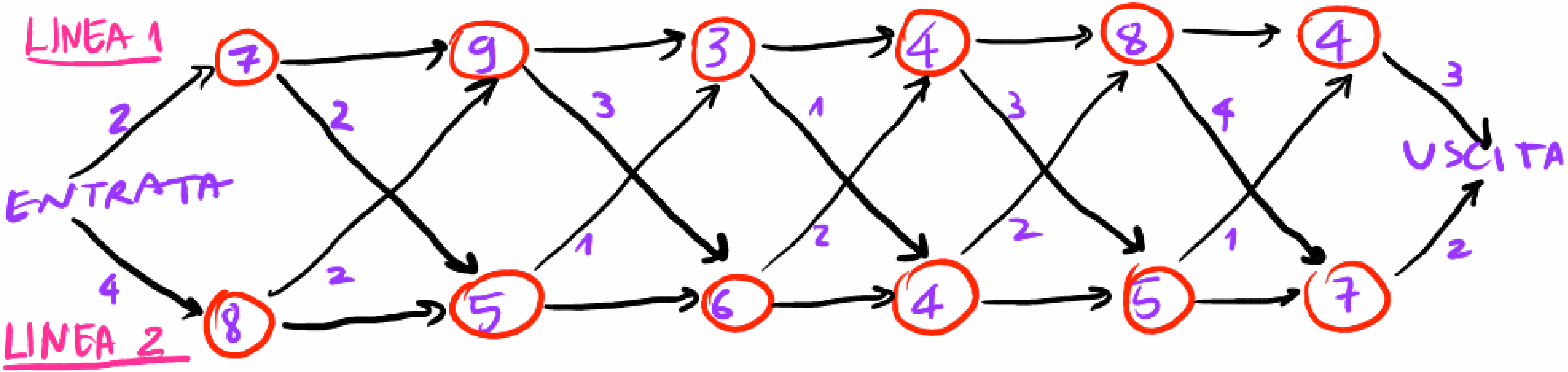
- CIASCUNA LINEA E' SUDDIVISA IN n STAZIONI TALI CHE LA j-ESIMA STAZIONE S_{1j} DELLA PRIMA LINEA ESEGUE ESATTAMENTE LE STESSE FUNZIONI DELLA j-ESIMA STAZIONE S_{2j} DELLA SECONDA LINEA, $1 \leq j \leq n$
- LA STAZIONE S_{ij} COMPLETA IL SUO TASK IN TEMPO a_{ij} $(1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n)$
- PER PASSARE DALLA STAZIONE S_{ij} A QUELLA $S_{i,j+1}$ SI IMPIEGA UN TEMPO TRASCURABILE $(1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-1)$
- PER PASSARE DALLA STAZIONE S_{ij} A QUELLA $S_{3-i,j+1}$ SI IMPIEGA UN TEMPO t_{ij} $(1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-1)$

- PER ENTRARE NELLA LINEA i SI IMPIEGA UN TEMPO e_i $(1 \leq i \leq 2)$
- PER USCIRE DALLA LINEA i SI IMPIEGA UN TEMPO x_i $(1 \leq i \leq 2)$

PROBLEMA

- IL PROBLEMA E' DI TROVARE LA SCHEDULAZIONE $S_{a_1 1}, S_{a_2 2}, \ldots, S_{a_n n}$, CON $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{1,2\}$, CHE IMPIEGA MINOR TEMPO

ESEMPIO



LINEA 1
LINEA 2
ENTRATA
USCITA
7
9
3
4
8
4
8
5
6
4
5
7
2
4
2
2
3
1
1
2
3
2
4
1
3
2

SOLUZIONE MEDIANTE FORZA BRUTA

- DETERMINARE TUTTE LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI E PER CIASCUNA DI ESSE CALCOLARE IL TEMPO IMPIEGATO
- SELEZIONARE LA SCHEDULAZIONE CARATTERIZZATA DAL TEMPO MINIMO

QUANTE SONO LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI ?

SOLUZIONE MEDIANTE FORZA BRUTA

- DETERMINARE TUTTE LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI E PER CIASCUNA DI ESSE CALCOLARE IL TEMPO IMPIEGATO
- SELEZIONARE LA SCHEDULAZIONE CARATTERIZZATA DAL TEMPO MINIMO

QUANTE SONO LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI ? 2^n

CIOE' TANTE QUANTE LE SEQUENZE

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ CON $a_i \in \{1, 2\}$.

SOLUZIONE MEDIANTE FORZA BRUTA

- DETERMINARE TUTTE LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI E PER CIASCUNA DI ESSE CALCOLARE IL TEMPO IMPIEGATO
- SELEZIONARE LA SCHEDULAZIONE CARATTERIZZATA DAL TEMPO MINIMO

QUANTE SONO LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI ? 2^n

QUAL E' IL TEMPO RICHIESTO PER CALCOLARE IL COSTO DI UNA SCHEDULAZIONE ?

SOLUZIONE MEDIANTE FORZA BRUTA

- DETERMINARE TUTTE LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI E PER CIASCUNA DI ESSE CALCOLARE IL TEMPO IMPIEGATO
- SELEZIONARE LA SCHEDULAZIONE CARATTERIZZATA DAL TEMPO MINIMO

QUANTE SONO LE POSSIBILI SCHEDULAZIONI? 2^n

QUAL E' IL TEMPO RICHIESTO PER CALCOLARE IL COSTO DI UNA SCHEDULAZIONE? $\Theta(n)$

PERTANTO LA COMPLESSITA' DELLA SOLUZIONE MEDIANTE FORZA BRUTA E' $\Theta(n 2^n)$

SOLUZIONE CON LA METODOLOGIA DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

PASSO 1: CARATTERIZZAZIONE DI UNA SCHEDULAZIONE OTTIMA

SIA $\Sigma_{1j} = \langle S_{a_1 1}, S_{a_2 2}, \dots, S_{1j} \rangle$ UNA SCHEDULAZIONE OTTIMA DALL'ENTRATA ALL'USCITA DELLA STAZIONE S_{1j}

- SE $j=1$ ALLORA $VAL(\Sigma_{1j}) = e_1 + a_{11}$
- SE $j \geq 2$ DISTINGUIAMO I CASI
  - $a_{j-1} = 1$
  - $a_{j-1} = 2$

CASO $a_{j-1} = 1$

LA SCHEDULAZIONE $\langle S_{a_1 1}, \ldots, S_{1,j-1} \rangle$ E' LA PIÙ VELOCE DAL PUNTO DI ENTRATA ALLA STAZIONE $S_{1,j-1}$.

(ALTRIMENTI CI SAREBBE UN'ALTRA SCHEDULAZIONE

$\langle S_{b_1 1}, \ldots S_{1,j-1} \rangle$ TALE CHE

$$VAL \langle S_{b_1 1}, \ldots S_{1,j-1} \rangle < VAL \langle S_{a_1 1}, \ldots, S_{1,j-1} \rangle$$

E QUINDI

$$VAL \langle S_{b_1 1}, \ldots S_{1,j-1}, S_{1j} \rangle < VAL \langle S_{a_1 1}, \ldots, S_{1,j-1}, S_{1j} \rangle \text{)}$$

CASO $a_{j-1} = 2$

LA SCHEDULAZIONE $\langle S_{a_1,1}, \dots, S_{2,j-1} \rangle$ E' LA PIÙ VELOCE DAL PUNTO DI ENTRATA ALLA STAZIONE $S_{2,j-1}$.

IN ALTRE PAROLE, UNA SOLUZIONE OTTIMA CONTIENE SOLUZIONI OTTIME A SOTTOPROBLEMI, VALE CIOE' LA PROPRIETA' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA.

PASSO 2: DEFINIZIONE RICORSIVA DEL VALORE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

$f_i[j]$: TEMPO MINIMO DALL'ENTRATA ALL'USCITA DI $S_{i,j}$

f^* : TEMPO MINIMO DALL'ENTRATA ALL'USCITA

SI HA:

$$f^* = \min\left(f_1[n] + x_1,\ f_2[n] + x_2\right)$$

$$f_1[1] = e_1 + a_{11}$$

$$f_2[1] = e_2 + a_{21}$$

PER $j = 2, 3, \ldots, n$ SI HA:

$$f_1[j] = \min\left(f_1[j-1] + a_{1j},\ f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}\right)$$

$$f_2[j] = \min\left(f_2[j-1] + a_{2j},\ f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}\right)$$

E QUINDI SI HANNO LE SEGUENTI RICORSIONI:

$$f_1[j] = \begin{cases} e_1 + a_{11} & \text{SE } j=1 \\ \min\left(f_1[j-1] + a_{1j},\ f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}\right) & \text{SE } 2 \le j \le n \end{cases}$$

$$f_2[j] = \begin{cases} e_2 + a_{21} & \text{SE } j=1 \\ \min\left(f_2[j-1] + a_{2j},\ f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}\right) & \text{SE } 2 \le j \le n \end{cases}$$

- E' ANCHE UTILE DEFINIRE I SEGUENTI VALORI $\ell_i[j]$ ED ℓ^* CHE CONSENTIRANNO DI COSTRUIRE SCHEDULAZIONI OTTIME $(i = 1,2,\ 2 \le j \le n)$:

$$\ell_1[j] = \begin{cases} 1 & \text{SE } f_1[j] = f_1[j-1] + a_{1j} \\ 2 & \text{SE } f_1[j] = f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j} \end{cases}$$

$$\ell_2[j] = \begin{cases} 2 & \text{SE } f_2[j] = f_2[j-1] + a_{2j} \\ 1 & \text{SE } f_2[j] = f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j} \end{cases}$$

$$\ell^* = \begin{cases} 1 & \text{SE } f^* = f_1[n] + x_1 \\ 2 & \text{SE } f^* = f_2[n] + x_2 \end{cases}$$

PASSO 3: CALCOLO DEL VALORE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

SOLUZIONE RICORSIVA (IMMEDIATA, MA INEFFICIENTE)

$OPT(i, j, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e})$ $\quad 1 \le i \le 2 \quad 1 \le j \le n$

if $j = 1$ **then**
  return $e_i + a_{i1}$
else
  return $\min(OPT(i, j-1) + a_{ij},$
    $OPT(3-i, j-1) + t_{3-i, j-1} + a_{ij})$

$MAIN\_OPT(\vec{a}, \vec{t}, \vec{e}, \vec{x})$
  return $\min(OPT(1, n, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e}) + x_1,$
    $OPT(2, n, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e}) + x_2)$

SOLUZIONE RICORSIVA (ANALISI DI COMPLESSITA')

- INDICHIAMO CON $r_i(j)$ IL NUMERO A RIFERIMENTI A $f_i[j]$ IN UN ALGORITMO RICORSIVO
- POICHE' $f^* = \min(f_1[n] + x_1, f_2[n] + x_2)$, SI HA: $r_1(n) = r_2(n) = 1$
- INOLTRE, DALLE RICORRENZE PER $f_1[j]$ E $f_2[j]$ SI HA:

$$r_1(j-1) = r_1(j) + r_2(j)$$
$$r_2(j-1) = r_1(j) + r_2(j) \qquad \text{PER} \quad j = n, n-1, \dots, 2$$

- PER INDUZIONE SU $n-j$ SI HA: $r_1(j) = r_2(j) = 2^{n-j}$

INFATTI:

CASO BASE: $n-j=0 \rightarrow j=n \rightarrow r_i(n)=1=2^0$

PASSO INDUTTIVO: $r_1(j-1)=r_1(j)+r_2(j)=2^{n-j}+2^{n-j}$
$$=2^{n-j+1}=2^{n-(j-1)}$$

- IN PARTICOLARE, $f_1[1]$ E $f_2[1]$ HANNO 2^{n-1} RIFERIMENTI
- IL NUMERO TOTALE DI RIFERIMENTI A VALORI $f_i[j]$ E'

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} r_i(j) = 2\cdot\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = 2\cdot\sum_{j'=0}^{n-1} 2^{j'} = 2\cdot(2^n-1) =$$
$$= 2^{n+1}-2 = \Theta(2^n)$$

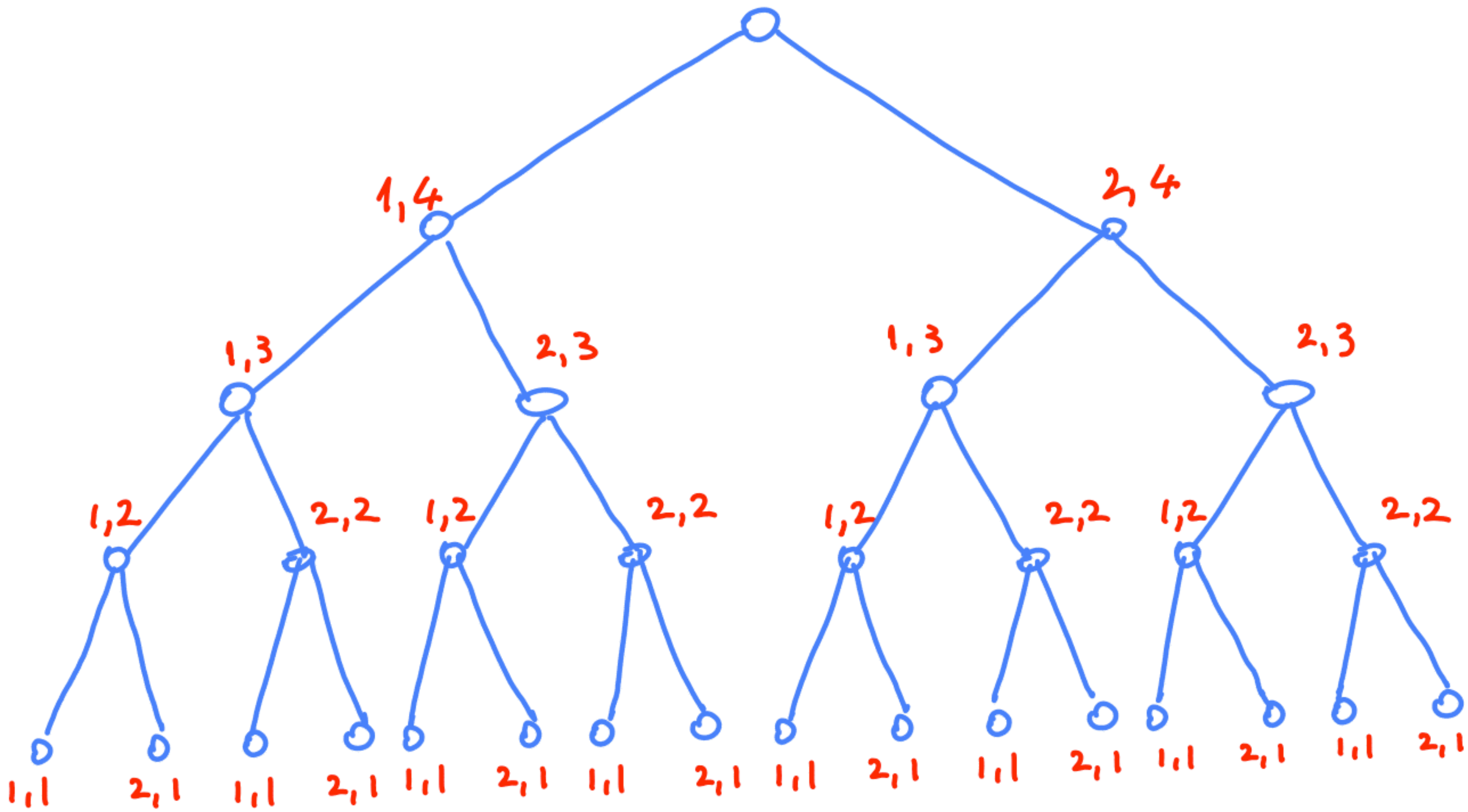
- PERTANTO, LA COMPLESSITÀ DELLA SOLUZIONE RICORSIVA È $\Omega(2^n)$

SOLUZIONE RICORSIVA CON MEMORIZZAZIONE

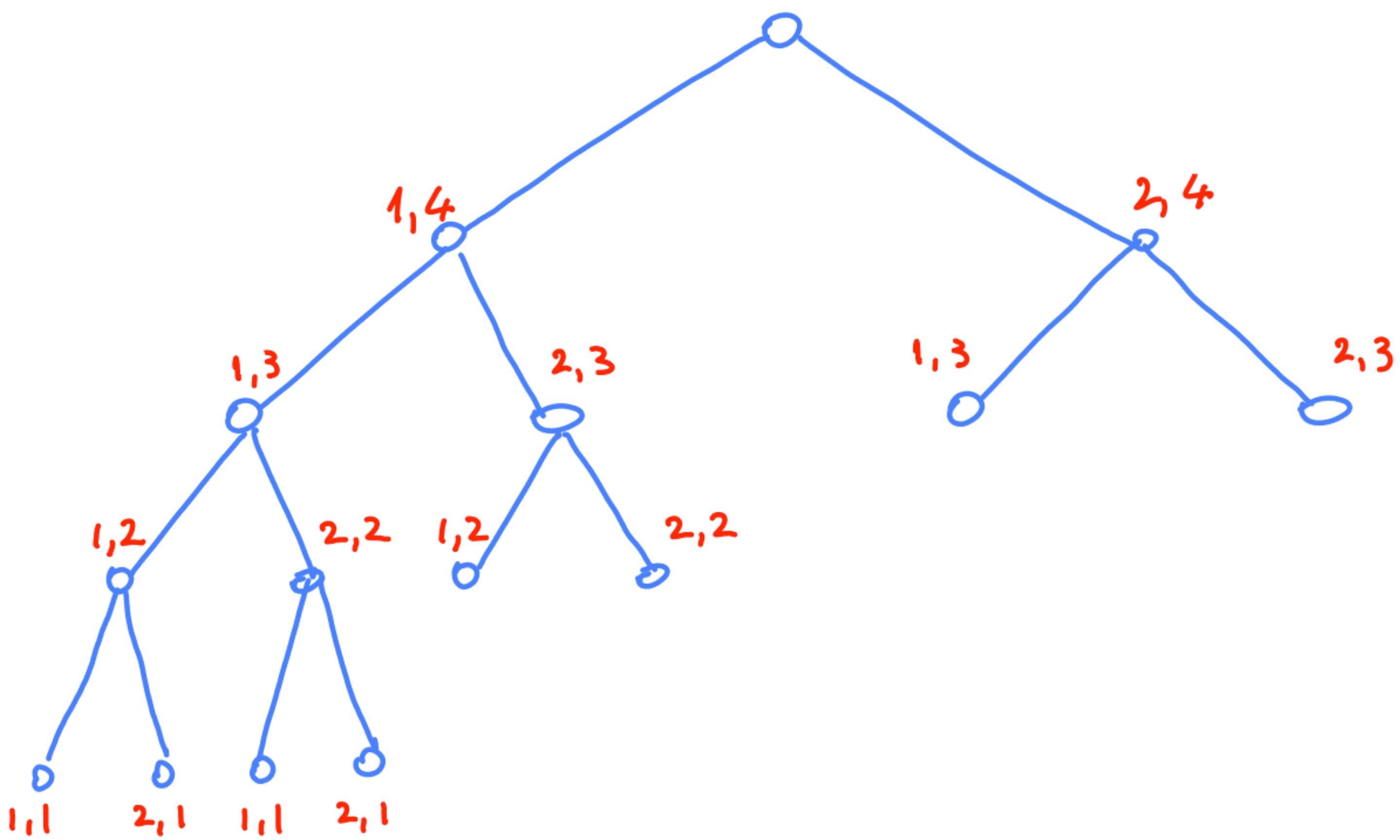
$M\text{-}OPT(i, j, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e})$

<u>if</u> $M[i,j]$ is defined <u>then</u>
    <u>return</u> $M[i,j]$
<u>if</u> $j=1$ <u>then</u>
    <u>return</u> $M[i,j] := e_i + a_{i1}$
<u>else</u>
    <u>return</u> $M[i,j] :=$
        $\min\left(M\text{-}OPT(i, j-1, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e}) + a_{ij},\right.$
            $\left.M\text{-}OPT(3-i, j-1, \vec{a}, \vec{t}, \vec{e}) + t_{3-i,j-1} + a_{ij}\right)$

ALBERO DI RICORSIONE DI OPT (n=4)



ALBERO DI RICORSIONE DI M-OPT (n=4)



SOLUZIONE BOTTOM-UP

FASTEST-WAY $(\vec{a}, \vec{t}, \vec{e}, \vec{x}, n)$

$f_1[1] := e_1 + a_{11}$

$f_2[1] := e_2 + a_{21}$

FOR $j := 2$ TO n DO

IF $f_1[j-1] \leq f_2[j-1] + t_{2,j-1}$ THEN

$f_1[j] := f_1[j-1] + a_{1j}$

$l_1[j] := 1$

ELSE

$f_1[j] := f_2[j-1] + t_{2,j-1} + a_{1j}$

$l_1[j] := 2$

<u>IF</u> $f_2[j-1] \leq f_1[j-1] + t_{1,j-1}$ <u>THEN</u>

$f_2[j] := f_2[j-1] + a_{2j}$

$l_2[j] := 2$

<u>ELSE</u>

$f_2[j] := f_1[j-1] + t_{1,j-1} + a_{2j}$

$l_2[j] := 1$

<u>IF</u> $f_1[n] + x_1 \leq f_2[n] + x_2$ <u>THEN</u>

$f^* := f_1[n] + x_1$

$l^* := 1$

<u>ELSE</u>

$f^* := f_2[n] + x_2$

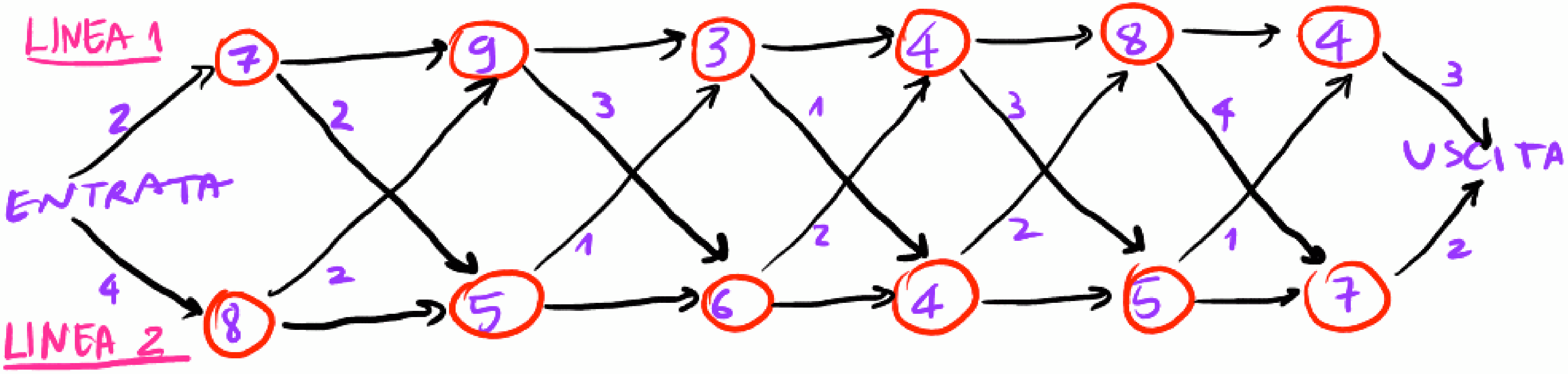
$l^* := 2$

- LA COMPLESSITA' DELLA PROCEDURA FASTEST-WAY E' $\Theta(n)$!

PASSO 4 : COSTRUZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

```
PRINT-STATIONS (l⃗, l*, n)
    i := l*
    PRINT ("LINEA DI ASSEMBLAGGIO", i, "STAZIONE", n);
    FOR j := n DOWNTO 2 DO
        i := l_i[j]
        PRINT ("LINEA DI ASSEMBLAGGIO", i, "STAZIONE", j-1);
```

ESEMPIO

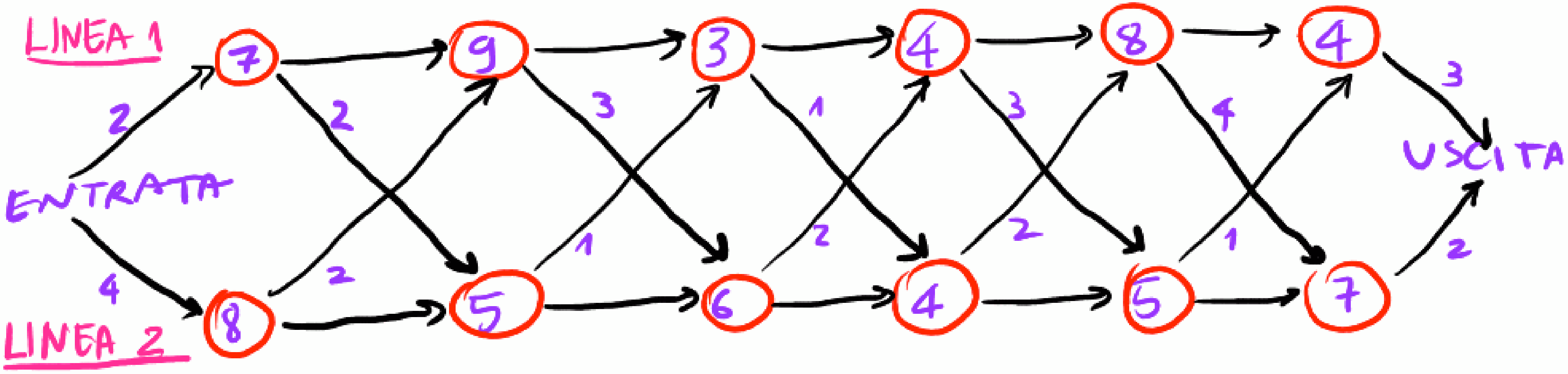


	1	2	3	4	5	6
$f_1[j]$	9	18	20	24	32	35
$f_2[j]$	12	16	22	25	30	37
$l_1[j]$		1	2	1	1	2
$l_2[j]$		1	2	1	2	2

$f^* = \min(35+3, 37+2) = 38$

$l^* = 1$

ESEMPIO: COSTRUZIONE DELLA SCHEDULAZIONE OTTIMA



	2	3	4	5	6
$l_1[j]$	1	2	1	1	2
$l_2[j]$	1	2	1	2	2

$l^* = 1$

$l^* = 1 \rightarrow a_6 = 1$

$l_1[6] = 2 \rightarrow a_5 = 2$

$l_2[5] = 2 \rightarrow a_4 = 2$

$l_2[4] = 1 \rightarrow a_3 = 1$

$l_1[3] = 2 \rightarrow a_2 = 2$

$l_2[2] = 1 \rightarrow a_1 = 1$

PERTANTO: $(S_{11}, S_{22}, S_{13}, S_{24}, S_{25}, S_{16})$ E' UNA SCHEDULAZ. OTTIMA

ESERCIZI

1. MODIFICARE PRINT-STATIONS IN MODO CHE STAMPI LE STAZIONI IN ORDINE CRESCENTE

2. LE TABELLE $f_i[j]$ E $l_i[j]$ OCCUPANO $4n-2$ LOCAZIONI DI MEMORIA.
SI MODIFICHI L'ALGORITMO FASTEST-WAY IN MODO TALE DA UTILIZZARE SOLO $2n+2$ LOCAZIONI

3. SUPPONIAMO CHE $t_{ij} \geq 0$, PER $i=1,2$ E $j=1,2,\dots,n$.
DIMOSTRARE CHE NON PUO' ESISTERE ALCUN j TALE CHE $l_1[j]=2$ E $l_2[j]=1$