ELEMENTI DELLA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- CARATTERIZZAZIONE DELLA STRUTTURA DI UNA SOLUZIONE OTTIMA (SOTTOSTRUTTURA OTTIMA)

(SCHEMA TIPICO)

1. SI DIMOSTRA CHE UNA SOLUZIONE CONSISTE NEL FARE UNA SCELTA, CHE LASCIA UNO O PIÙ SOTTOPROBLEMI DA RISOLVERE
2. SI SUPPONE TEMPORANEAMENTE DI CONOSCERE TALE SCELTA
3. FATTA LA SCELTA, SI DETERMINANO I SOTTOPROBLEMI DA CONSIDERARE E LO SPAZIO PIÙ PICCOLO DI SOTTOPROBLEMI RISULTANTE
4. SI DIMOSTRA CHE LE SOLUZIONI DEI SOTTOPROBLEMI ALL'INTERNO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA SONO OTTIME (TECNICA CUT-PASTE)

LA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA VARIA IN FUNZIONE DEL TIPO DI PROBLEMA IN DUE MODI:

- NUMERO n_1 DI SOTTOPROBLEMI UTILIZZATI IN UNA SOLUZIONE OTTIMA

  <u>ES.</u> CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$ $n_1 = 1$

  SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$ $n_1 = 2$

- NUMERO n_2 DI SCELTE PER DETERMINARE QUALI SOTTOPROBLEMI UTILIZZARE

  <u>ES.</u> CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$ $n_2 = 2$

  SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$ $n_2 = \ell - 1$

  (ℓ E' LA LUNGHEZZA DELLA SEQUENZA)

GENERALMENTE, LA COMPLESSITÀ DI UN ALGORITMO DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA DIPENDE DA <u>DUE</u> FATTORI:

- DIMENSIONE DELLO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI
- NUMERO DI SCELTE DA CONSIDERARE PER OGNI SOTTOPROBLEMA

<u>ES.</u> * CATENE DI MONTAGGIO $\longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\text{DIM}(\text{SPAZIO\_SOTTOPROBLEMI}) = \Theta(n) \\ &n_2 = 2 \end{aligned}\right] \rightsquigarrow O(n)$$

* SEQUENZE DI MATRICI $\longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\text{DIM}(\text{SPAZIO\_SOTTOPROBLEMI}) = \Theta(n^2) \\ &n_2 = O(n) \end{aligned}\right] \rightsquigarrow O(n^3)$$

LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA USA LA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA SECONDO UNO SCHEMA BOTTOM-UP, CIOE'

- PRIMA: VENGONO TROVATE LE SOLUZIONI OTTIME DEI SOTTO PROBLEMI
- DOPO: VIENE TROVATA UNA SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA.

DI SOLITO IL COSTO DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA E' PARI AI COSTI PER RISOLVERE I SOTTOPROBLEMI PIÙ UN COSTO DIRETTAMENTE IMPUTABILE ALLA SCELTA STESSA

BISOGNA STARE ATTENTI A NON ASSUMERE L'ESISTENZA DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA ANCHE QUANDO NON E' POSSIBILE FARLO!

ESEMPIO SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO ORIENTATO E SIANO $u, v \in V$

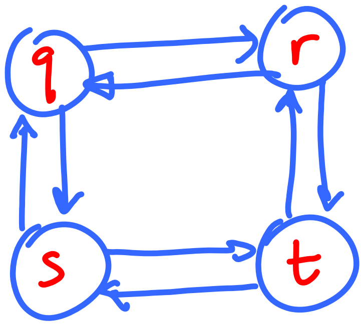
PROBLEMA 1 TROVARE UN CAMMINO DA u A v IN G FORMATO DAL MINOR NUMERO DI ARCHI (TALE CAMMINO, OVVIAMENTE, SARA' SEMPLICE)

PROBLEMA 2 TROVARE UN CAMMINO SEMPLICE DA u A v IN G FORMATO DAL MAGGIOR NUMERO DI ARCHI

- IL PROBLEMA 1 PRESENTA UNA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

- IL PROBLEMA 2 NON PRESENTA UNA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

INFATTI, SI CONSIDERI IL GRAFO



* IL CAMMINO $q \to r \to t$ E' UN CAMMINO SEMPLICE MASSIMO DA q A t

* MA $q \to r$ NON E' UN CAMMINO SEMPLICE MASSIMO DA q A r

INFATTI $q \to s \to t \to r$ E' UN CAMMINO SEMPLICE DA q A r PIU' LUNGO DEL CAMMINO $q \to r$!

* NEL CASO DEL PROBLEMA 2, NON SOLO NON VALE LA PROPRIETÀ DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA, MA ANCHE NON RISULTA POSSIBILE ASSEMBLARE UNA SOLUZIONE VALIDA DEL PROBLEMA DALLE SOLUZIONI DEI SOTTOPROBLEMI.

INFATTI, SE COMBINIAMO I CAMMINI SEMPLICI MASSIMI

$$q \to s \to t \to r \quad \text{E} \quad r \to q \to s \to t$$

SI OTTIENE IL CAMMINO

$$q \to s \to t \to r \to q \to s \to t$$

CHE NON E' SEMPLICE!

INFATTI, I SOTTOPROBLEMI PER TROVARE UN CAMMINO SEMPLICE MASSIMO NON SONO INDIPENDENTI

- RIPETIZIONE DEI SOTTOPROBLEMI

  - LO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI DEVE ESSERE "PICCOLO", NEL SENSO CHE UN ALGORITMO RICORSIVO RISOLVE RIPETUTAMENTE GLI STESSI PROBLEMI

  - GLI ALGORITMI DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA SFRUTTANO I SOTTOPROBLEMI RIPETUTI RISOLVENDO CIASCUN SOTTOPROBLEMA UNA SOLA VOLTA, MEMORIZZANDO LA SOLUZIONE IN UNA TABELLA

ES. SOLUZIONE RICORSIVA AL PROBLEMA DELLA MOLTIPLICAZIONE DI UNA SEQUENZA DI MATRICI:

RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, i, j)

if $i = j$ **then**

  return 0

$m[i,j] := +\infty$

for $k := i$ **to** $j-1$ **do**

  $q :=$ RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, i, k)

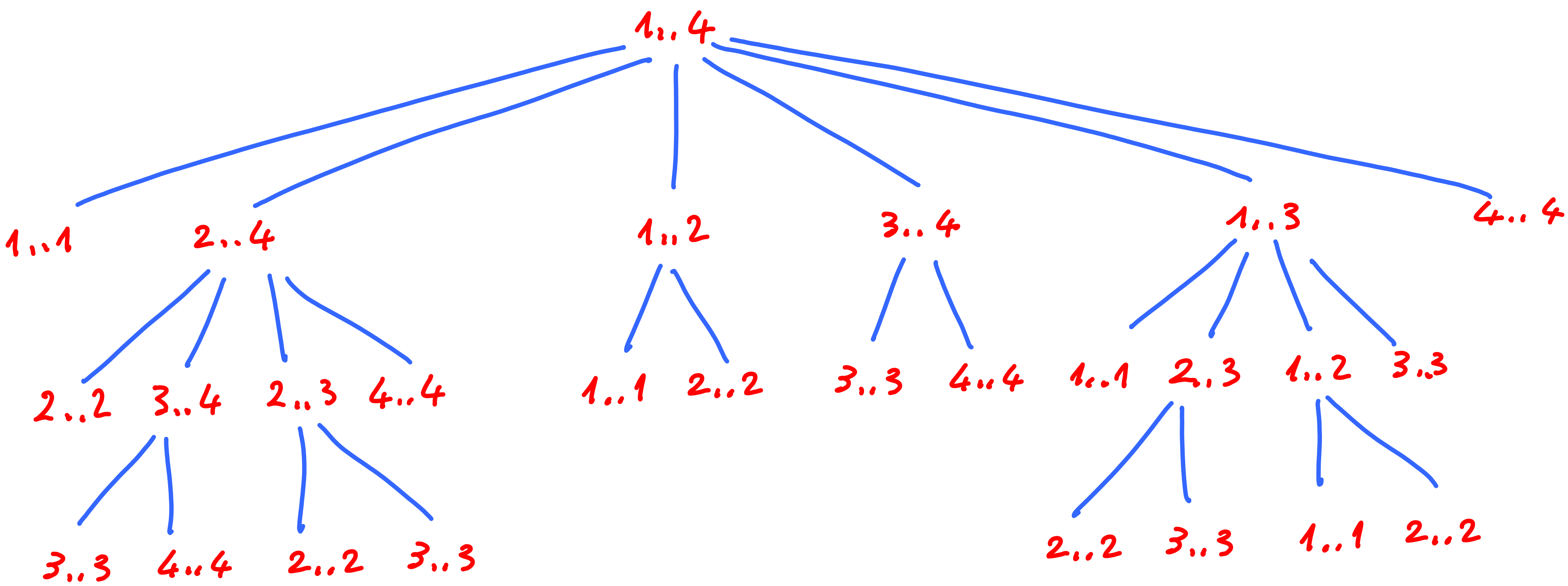
    + RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, k+1, j) + $p_{i-1} p_k p_j$

  if $q < m[i,j]$ **then**

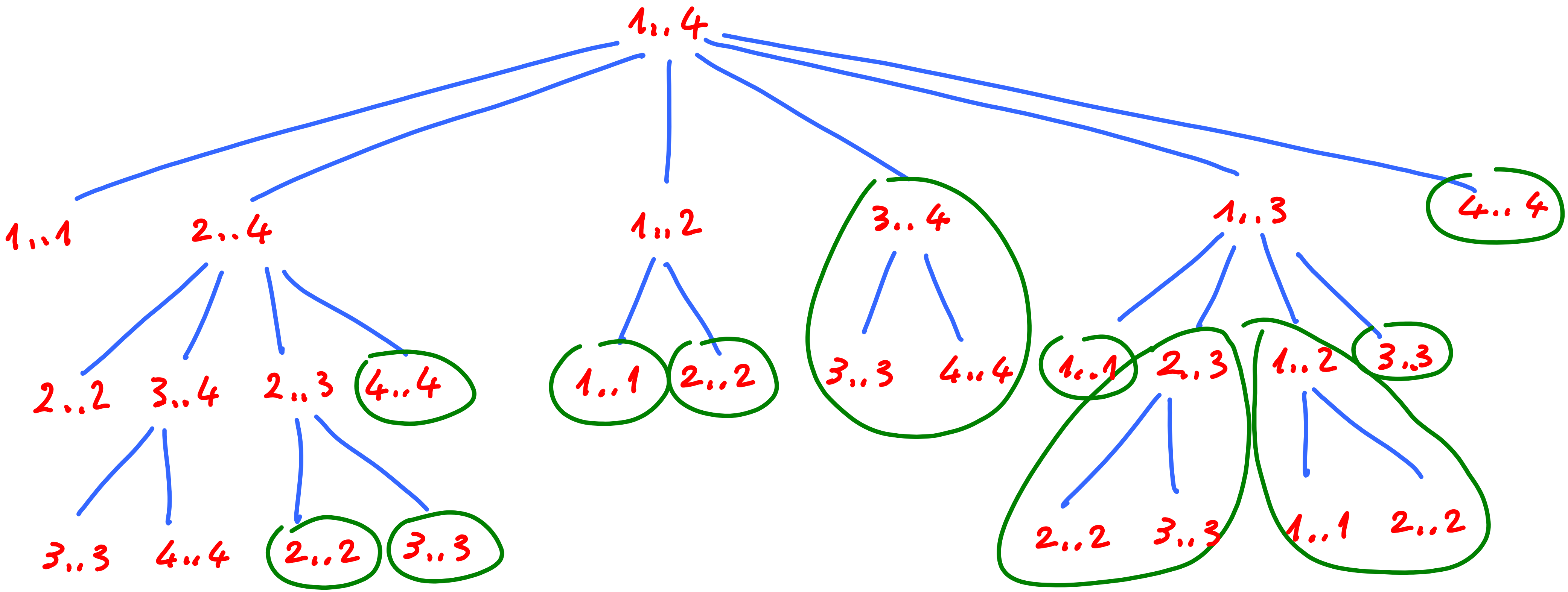
    $m[i,j] := q$

return $m[i,j]$

ALBERO DI RICORSIONE DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, 1, 4)



ALBERO DI RICORSIONE DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN (p, 1, 4)



SOTTOPROBLEMI RIPETUTI

COMPLESSITA' DI RECURSIVE_MATRIX_CHAIN

- SIA $T(n)$ IL TEMPO IMPIEGATO DA RECURSIVE_MATRIX_CHAIN SU UN'ISTANZA DI DIMENSIONE n

- VERIFICHIAMO CHE $T(n) = \Omega(2^n)$. SI HA:

$$T(1) \geq 1$$

$$T(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(T(k) + T(n-k) + 1\right), \quad \text{PER } n > 1$$

QUINDI: $$T(n) \geq 2 \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$$

DIMOSTRIAMO PER INDUZIONE CHE $T(n) \geq 2^{n-1}$.

- $T(1) \geq 1 = 2^0 = 2^{1-1}$
- $$T(n+1) \geq 2 \sum_{k=1}^{n} T(k) + n + 1 \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + n + 1$$
$$\geq 2(2^n - 1) + n + 1 = 2^{n+1} - 2 + n + 1$$
$$= 2^{n+1} + n - 1 \geq 2^n$$

[redacted]

```
MEMOIZED_MATRIX_CHAIN (p)
  n := length[p] - 1
  for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
          m[i,j] := +∞
  return LOOKUP_CHAIN (p, 1, n)
```

```
LOOKUP_CHAIN (p, i, j)
if m[i,j] < +∞ then return m[i,j]
if i = j then m[i,j] := 0
  else for k := i to j-1 do
          q := LOOKUP_CHAIN (p, i, k)
               + LOOKUP_CHAIN (p, k+1, j)
               + p_{i-1} p_k p_j
          if q < m[i,j] then
               m[i,j] := q
return m[i,j]
```