# IL PROBLEMA DELLA MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

- A - MATRICE $p \times q$
- B - MATRICE $q \times r$

(E QUINDI A E B SONO COMPATIBILI)

PRODOTTO DI MATRICI "RIGHE-PER-COLONNE"

```
MATRIX-MULTIPLY (A,B)
   p:= rows[A]
   q:= columns[A]
   r:= columns[B]
   for i:=1 to p do
      for j:=1 to r do
         C[i,j]:=0
         for k:=1 to q do
            C[i,j]:= C[i,j] + A[i,k]· B[k,j]
   return C
```

COMPLESSITA' $O(p \cdot q \cdot r)$

# MOLTIPLICAZIONE DI SEQUENZE DI MATRICI

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 & P_0 \times P_1 \\ A_2 & P_1 \times P_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & P_{n-1} \times P_n \end{array}\right\} \text{SEQUENZA DI MATRICI COMPATIBILI}$$

- A NOI INTERESSA CALCOLARE $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$
- IL PRODOTTO DI MATRICI E' ASSOCIATIVO, CIOE' $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$


<u>ESEMPIO</u>

$A_1$ : $10 \times 100$

$A_2$ : $100 \times 5$

$A_3$ : $5 \times 50$

$$\#((A_1 \cdot A_2) \cdot A_3) = 10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 5000 + 2500 = 7500$$

$$\#(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) = 100 \cdot 5 \cdot 50 + 10 \cdot 100 \cdot 50$$

$$= 25000 + 50000 = 75.000$$

**ESEMPIO** (DIVERSE PARENTESIZZAZIONI)

$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$

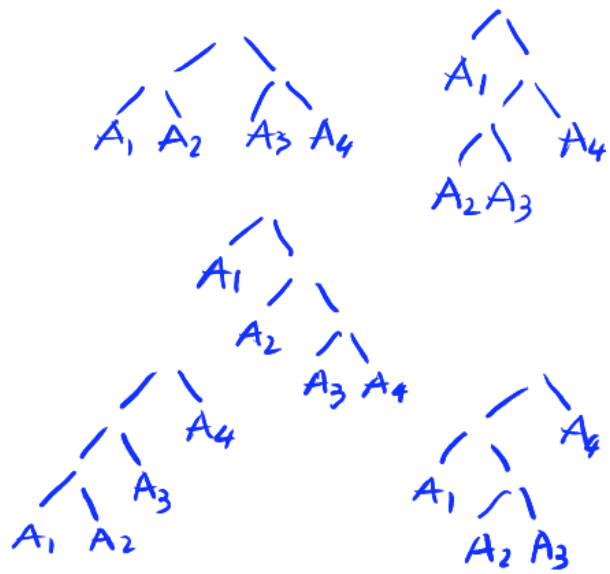
$((A_1 \, A_2)(A_3 \, A_4))$

$(A_1((A_2 \, A_3)A_4))$

$(A_1(A_2(A_3 \, A_4)))$

$(((A_1 \, A_2)A_3)A_4)$

$((A_1(A_2 \, A_3))A_4)$



**DEF.** PARENTESIZZAZIONI COMPLETE DI UNA SEQUENZA DI MATRICI

SI DICE CHE UN'ESPRESSIONE $E$ E' COMPLETAMENTE PARENTESIZZATA SE VALE UNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI:

- $E$ E' UNA SINGOLA MATRICE
- $E$ HA LA FORMA $(E_1 \cdot E_2)$, DOVE $E_1$ ED $E_2$ SONO ESPRESSIONI COMPLETAMENTE PARENTESIZZATE.

## METODO ESAUSTIVO

LA COMPLESSITA' DEL METODO ESAUSTIVO E' DOMINATA DAL NUMERO DI DIVERSE PARENTESIZZAZIONI

$P(n) = \#$ DIVERSE PARENTESIZZAZIONI DI UNA SEQUENZA DI $n$ MATRICI

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) \end{cases}$$

$P(1) = 1$

$P(2) = 1$

$P(3) = P(1)P(2) + P(2) \cdot P(1) = 2$

$P(4) = P(1) \cdot P(3) + P(2) \cdot P(2) + P(3) \cdot P(1) = 2 + 1 + 2 = 5$

$n \geq 3$,

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} P(i) \cdot P(n-i) =$$

$$= 2P(1) \cdot P(n-1) + \sum_{i=2}^{n-2} P(i) \cdot P(n-i) \geq 2\, P(n-1)$$

$$P(n) \geq 2\, P(n-1) \geq 2 \cdot 2\, P(n-2) = 2^2 P(n-2)$$

$$\geq 2^{n-2} P(2) = 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad P(n) = \Omega(2^n)$$

# CARATTERIZZAZIONE DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

SIA $E$ UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA PER LA SEQUENZA DI MATRICI $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ DI DIMENSIONI $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$.

SUPPONIAMO CHE $n \geq 2$.

$E = (E_1 \cdot E_2)$,

CON $E_1$ PARENTESIZZAZIONE DI $(A_1, \dots, A_k)$

$E_2$ PARENTESIZZAZIONE DI $(A_{k+1}, \dots, A_m)$

$1 \leq k \leq m-1$

POICHE'

$$\#(E) = \#(E_1) + \#(E_2) + p_0 p_k p_n$$

NE SEGUE CHE

- $E_1$ PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_1, \dots, A_k)$
- $E_2$ PARENTESIZZAZIONE OTTIMA DI $(A_{k+1}, \dots, A_m)$

PERTANTO LA CLASSE DEI SOTTOPROBLEMI DA RISOLVERE E' DATA DA:

$$\{(A_i, \dots, A_j) : 1 \leq i \leq j \leq m\}$$

$m[i,j]$ = COSTO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA DI $(A_i, \dots, A_j)$

DEFINIZIONE RICORSIVA DEL COSTO DI UNA PARENTESIZZAZIONE OTTIMA

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & i=j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left( m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right) & i<j \end{cases}$$

```
MATRIX_CHAIN_ORDER(p)
for i := 1 to n do
    m[i,i] := 0
for Δ := 1 to n-1 do
    for i := 1 to n-Δ do
        j := Δ+i
        m[i,j] := +∞
        for k := i to j-1 do
            q := m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j
            if q < m[i,j] then
                m[i,j] := q
                s[i,j] := k
return m, s
```

```
MATRIX_CHAIN_MULTIPLY (A, s, i, j)
  if  i = j  then
      return  Ai
  else
      X := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY (A, s, i, s[i,j])
      Y := MATRIX_CHAIN_MULTIPLY (A, s, s[i,j]+1, j)
      return  MATRIX_MULTIPLY (X, Y)
```

**ESEMPIO**

$A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$

$p = (30, 35, 15, 5, 10, 20, 25)$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $15750^{1}$ | $7875^{1}$ | $9375^{3}$ | $11875^{3}$ | $15125^{3}$ |
| 2 | – | 0 | $2625^{2}$ | $4375^{3}$ | $7125^{3}$ | $10500^{3}$ |
| 3 | – | – | 0 | $750^{3}$ | $2500^{3}$ | $5375^{3}$ |
| 4 | – | – | – | 0 | $1000^{4}$ | $3500^{5}$ |
| 5 | – | – | – | – | 0 | $5000^{5}$ |
| 6 | – | – | – | – | – | 0 |


$(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \cdot ((A_4 \cdot A_5) \cdot A_6)$