

## ALGORITMI GREEDY

- SI TRATTA DI ALGORITMI PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE IN GRADO DI COSTRUIRE UNA SOLUZIONE OTTIMA ATTRAVERSO UNA SEQUENZA "TOP-DOWN" DI SCELTE LOCALMENTE OTTIME
- NON SEMPRE UNA STRATEGIA GREEDY PORTA AD UNA SOLUZIONE OTTIMA (ES. PROBLEMA DELLO ZAINO 0-1)

### UN PROBLEMA DI SELEZIONE DI ATTIVITA'

SISTEMA DI ATTIVITA'  $(S, s, f)$

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  - INSIEME DI ATTIVITA' IN COMPETIZIONE PER L'USO ESCLUSIVO DI UNA RISORSA

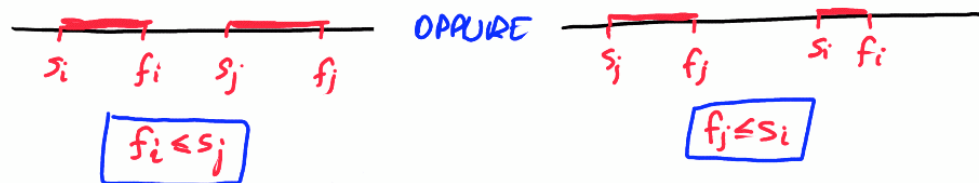
$s: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  -  $(s_i =_{\text{def}} s(i))$  INIZIO ATTIVITA'

$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  -  $(f_i =_{\text{def}} f(i))$  FINE ATTIVITA'

TALI CHE  $s_i < f_i$ , PER  $i = 1, \dots, n$

$[s_i, f_i[$  - INTERVALLO TEMPORALE PER CUI L'ATTIVITA'  $a_i$  RICHIEDE L'USO ESCLUSIVO DELLA RISORSA

- DUE ATTIVITA'  $a_i$  E  $a_j$  SONO COMPATIBILI SE  
 $[s_i, f_i] \cap [s_j, f_j] = \emptyset$ , CIOE'



- UN SOTTOINSIEME  $A \subseteq S$  E' UN INSIEME DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI SE OGNI COPPIA DI ATTIVITA' DISTINTE  $a_i, a_j$  IN  $A$  E' COSTITUITA DA ATTIVITA' COMPATIBILI

- DATO UN SISTEMA DI ATTIVITA'  $(S, s, f)$ ,  
IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITA' CONSISTE  
NEL DETERMINARE UN SOTTOINSIEME DI CARDINALITA'  
MASSIMA  $A \subseteq S$  DI ATTIVITA' MUTUAMENTE  
COMPATIBILI

ES.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s_i$	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
$f_i$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- $a_1$  E  $a_2$  NON SONO COMPATIBILI
- $\{a_3, a_9, a_{11}\}$  E' UN INSIEME DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI
- $\{a_1, a_2, a_8, a_{11}\}$   
 $\{a_3, a_4, a_9, a_{11}\}$  } SONO INSIEMI DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI DI CARDINALITA' MASSIMA

- SOLUZIONE MEDIANTE RICERCA ESAUSTIVA

- SI GENERINO TUTTI I POSSIBILI SOTTOINSIEMI ACS  
 $O(2^n)$
- SI VERIFICHINO PER CIASCUNO DI ESSI SE SI TRATTA DI UN INSIEME DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI  
 $O(n^2)$
- SI DETERMINI IL SOTTOINSIEME ACS DI ATTIVITA' MUTUAMENTE COMPATIBILI DI CARDINALITA' MASSIMA

COMPLESSITA':  $O(m^2 \cdot 2^m)$

## STUDIO DI UNA SOLUZIONE OTTIMA

- SIA  $A \in S$  UNA SOLUZIONE OTTIMA
  - SIA  $a_i \in A$  (SPESSO SCRIVEREMO  $i \in A$ )
  - $a_i$  INDUCE I DUE SOTTOPROBLEMI
$$S_i^- = \{k \in S : f_k \leq s_i\}$$
$$S_i^+ = \{k \in S : s_k \geq f_i\}$$
  - E' IMMEDIATO VERIFICARE CHE
$$A \cap S_i^- \text{ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA PER } S_i^-$$
$$A \cap S_i^+ \text{ E' UNA SOLUZIONE OTTIMA PER } S_i^+$$
- (IOE), VALE LA PROPRIETA' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA

## STUDIO DELLO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI

$$j \in S_i^- \begin{cases} (S_i^-)_j^- = S_j^- \\ (S_i^-)_j^+ = S_{ji} = \{k \in S : f_j \leq s_k < f_k \leq s_i\} \end{cases}$$

$$j \in S_i^+ \begin{cases} (S_i^+)_j^+ = S_j^+ \\ (S_i^+)_j^- = S_{ij} = \{k \in S : f_i \leq s_k < f_k \leq s_j\} \end{cases}$$

- INTRODUCENDO DUE NUOVE ATTIVITA' DI COMODO  $a_0, a_{n+1}$  CARATTERIZZATE DA  $f_0=0$  E  $s_{n+1} > \max f_k$ , POSSIAMO SCRIVERE:  $S_i^- = S_{0i}$  ,  $S_i^+ = S_{i,n+1}$

- E' FACILE ALLORA VERIFICARE CHE LO SPAZIO DEI SOTTOPROBLEMI RILEVANTI PER IL PROBLEMA DELLE ATTIVITA' E' :

$$\{ S_{ij} : 0 \leq i, j \leq n+1 \}$$

- INDICHIAMO CON  $c[i,j]$  LA CARDINALITA' DI UNA SOLUZIONE OTTIMA AL PROBLEMA  $S_{ij}$ . SI HA:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{SE } S_{ij} = \emptyset \\ \max_{k \in S_{ij}} (c[i,k] + c[k,j] + 1) & \text{SE } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$

(TALE RICORRENZA PUO' ESSERE UTILIZZATA BOTTOM-UP SEGUENDO L'ORDINAMENTO CRESCENTE DELLE CARDINALITA' DEGLI INSIEMI  $S_{ij}$ )

- E' POSSIBILE SEMPLIFICARE IL CALCOLO DEGLI INSIEMI  $S_{ij}$  ?

- SUPPONIAMO CHE LE ATTIVITA' SIANO ORDINATE IN MODO TALE CHE:  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$

- ALLORA:  $k \in S_{ij} \rightarrow i < k < j$   $j - i - 1 \leq 0$

DA CUI:  $|S_{ij}| \leq \max(j - i - 1, 0)$

IN PARTICOLARE,  $j \leq i + 1 \rightarrow S_{ij} = \emptyset$

- NELL'IPOTESI  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$ , LE CARDINALITA'  $c[i,j]$  POSSONO ESSERE CALCOLATE A PARTIRE DALLE COPPIE  $(i, i+1)$  PROCEDENDO PER VALORI DI  $j-i$  NON DECRESCENTI

COMPLESSITA':  $O(n^3)$

- SIN QUI NIENTE DI NUOVO!
- E' POSSIBILE CONVERTIRE LA PRECEDENTE SOLUZIONE IN UNA SOLUZIONE "GREEDY"?

- SI RICONSIDERI LA PRECEDENTE RICORRENZA:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{SE } S_{ij} = \emptyset \\ \max_{k \in S_{ij}} (c[i,k] + c[k,j] + 1) & \text{SE } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$

- PER APPLICARLA, AD OGNI PASSO OCCORRE "INDOVINARE" LA SCELTA GIUSTA DI  $k$  TRA AL PIU'  $j-i-1$  VALORI E QUINDI RISOLVERE DUE SOTTOPROBLEMI,
- E' POSSIBILE "INDOVINARE"  $k$  DIRETTAMENTE E RIDURRE I SOTTOPROBLEMI AD UNO SOLO?  
(SCELTA GREEDY)

- DATO  $S_{ij} \neq \emptyset$ , SI PONGA  $\bar{k} = \min S_{ij}$
- CHIARAMENTE  $S_{i\bar{k}} = \emptyset$ , DA CUI  $c[l, \bar{k}] = 0$   
 CINFATTI, SE  $l \in S_{i\bar{k}} \rightarrow f_l \leq s_l < f_{\bar{k}} \leq s_{\bar{k}} < f_{\bar{k}} \leq s_j$   
 $\rightarrow l \in S_{ij}$  E  $l < \bar{k}$ , ASSURDO)
- QUINDI IN CORRISPONDENZA DI  $\bar{k}$  C'E' DA RISOLVERE UN SOLO SOTTOPROBLEMA.
- VALE:  $c[l, ij] = c[l, \bar{k}, ij] + 1$  ?

- SIA  $A_{ij}$  UNA SOLUZIONE OTTIMA PER  $S_{ij}$ .  
 ALLORA  $A'_{ij} = (A_{ij} \setminus \{\min A_{ij}\}) \cup \{\bar{k}\}$  E' UNA  
 SOLUZIONE OTTIMA PER  $S_{ij}$
- INFATTI, SE  $\min A_{ij} = \bar{k}$ , ALLORA  $A'_{ij} = A_{ij}$  E' OTTIMA
- SE  $\min A_{ij} > \bar{k}$ , POICHE'  $|A'_{ij}| = |A_{ij}|$ , E' SUFFICIENTE VERIFICARE CHE TUTTE LE ATTIVITA' IN  $A_{ij} \setminus \{\min A_{ij}\}$  SONO COMPATIBILI CON  $\bar{k}$ .
- SIA  $l \in A_{ij} \setminus \{\min A_{ij}\}$ , PONIAMO  $m = \min A_{ij}$ , ALLORA  $f_m \leq s_l$ . MA  $f_{\bar{k}} \leq f_m$ , QUINDI  $f_{\bar{k}} \leq s_l$ , CIOE'  $\bar{k}$  ED  $l$  SONO COMPATIBILI.

PERTANTO

-  $A'_{ij} = \{k\}$  E' UNA SOLUZIONE OTTIMA PER  $S_{k,j}$ , QUINDI

$$|A'_{ij} = \{k\}| = c[k,j]$$

- POICHE'  $A'_{ij}$  E' UNA SOLUZIONE OTTIMA PER  $S_{i,j}$  SI

HA  $|A'_{ij}| = c[i,j]$ , DA CUI:

$$c[i,j] = c[k,j] + 1$$

- LA SCELTA  $k = \min S_{ij}$  E' GREEDY  
RELATIVAMENTE ALLA SEGUENTE INTUIZIONE:  
"SCEGLIENDO TRA TUTTE LE ATTIVITA' COMPATIBILI  
QUELLA CHE TERMINA PRIMA, SI MASSIMIZZA LA  
DISPONIBILITA' DELLA RISORSA PER LE RIMANENTI ATTIVITA'."

- SI OSSERVI CHE PER SELEZIONARE  $k = \min S_{ij}$  NON  
E' NECESSARIO AVERE RISOLTO PRECEDENTEMENTE  
IL PROBLEMA  $S_{k,j}$ .

- QUINDI UNA SOLUZIONE OTTIMA PUO' ESSERE COSTRUITA  
IN MANIERA TOP-DOWN

RECURSIVE\_ACTIVITY\_SELECTOR( $s, f, i, j$ )

FOR  $k = i + 1$  TO  $j - 1$  DO

IF  $f_i \leq s_k < f_k \leq s_j$  THEN

RETURN  $\{k\} \cup \text{RECURSIVE\_ACTIVITY\_SELECTOR}(s, f, k, j)$

RETURN  $\emptyset$



- DICHE' TUTTE LE CHIAMATE A R-A-S SONO DEL TIPO  $R-A-S(S, s_k, i, n)$ , ESSA PUO' ESSERE SEMPLIFICATA COSI':

RECURSIVE\_ACTIVITY\_SELECTOR ( $s, f, i$ )

$n := |s|$

FOR  $k := i+1$  TO  $n$  DO

IF  $f_i \leq s_k$  THEN

RETURN  $\{k\} \cup \text{RECURSIVE\_ACTIVITY\_SELECTOR}(s, f, k)$

RETURN  $\emptyset$

- OGNI ATTIVITA' VIENE CONSIDERATA ESATTAMENTE UNA VOLTA, QUINDI R-A-S E' LINEARE

- LA "QUASI" RICORSIONE DI CODA DI R-A-S PUO' ESSERE FACILMENTE ELIMINATA, DANDO LUOGO AL SEGUENTE ALGORITMO ITERATIVO:

CREEZY\_ACTIVITY\_SELECTOR ( $s, f$ )

$n := |s|$

$A := \{1\}$

$i := 1$

for  $m := 2$  to  $n$  do

if  $s_m \geq f_i$  then

$A := A \cup \{m\}$

$i := m$

return  $A$

COMPLESSITA':  $O(n)$

(A MENO DELL'ORDINAMENTO DI  $S$ )

ES.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$s_i$	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
$f_i$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

### ESERCIZI

- 1) CHE COSA SUCCEDDE SE ANZICHÈ SELEZIONARE L'ATTIVITÀ CHE TERMINA PRIMA, SI SELEZIONA L'ATTIVITÀ CHE INIZIA PIÙ TARDI?
- 2) VERIFICARE CHE LE SEGUENTI SCELTE "GREEDY" NON FUNZIONANO PER IL PROBLEMA DELLA SELEZIONE DELLE ATTIVITÀ:  
"TRA TUTTE LE ATTIVITÀ COMPATIBILI"
  - a) SI SELEZIONA L'ATTIVITÀ DI DURATA MINIMA
  - b) SI SELEZIONA L'ATTIVITÀ CHE INTERSECA IL MINOR NUMERO DI ATTIVITÀ COMPATIBILI
  - c) SI SELEZIONA L'ATTIVITÀ CHE INIZIA PRIMA,

- RIASSUMENDO, LA STRATEGIA GREEDY CONSISTE NEI SEGUENTI PASSI:

1. VERIFICARE LA PROPRIETA' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA
2. VERIFICARE CHE ESISTE SEMPRE UNA SOLUZIONE OTTIMA CHE INCLUDE LA SCELTA GREEDY
3. VERIFICARE CHE DOPO LA SCELTA GREEDY IL PROBLEMA INIZIALE E' RICONDOTTO AD UN SOTTO PROBLEMA DELLO STESSO TIPO LA CUI SOLUZIONE OTTIMA PUO' ESSERE COMBINATA CON LA SCELTA GREEDY PER DARE LUOGO AD UNA SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA INIZIALE

### PROGRAMMAZIONE DINAMICA E STRATEGIA GREEDY

- TALI METODOLOGIE UTILIZZANO ENTRAMBE LA PROPRIETA' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA
- E' QUINDI POSSIBILE CHE:
  - SI UTILIZZI LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA QUANDO E' SUFFICIENTE UNA PIU' EFFICIENTE STRATEGIA GREEDY
  - PER ERRORE SI DIA UNA SOLUZIONE BASATA SULLA STRATEGIA GREEDY QUANDO INVECE E' NECESSARIO UTILIZZARE LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

PROBLEMA DELLO ZAINO (VERSIONE INTERA)  
(KNAPSACK PROBLEM)

CAPACITÀ DELLO ZAINO  $W \in \mathbb{N}$

OGGETTO	PESO	VALORE	
1	$w_1 > 0$	$v_1$	$A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
2	$w_2 > 0$	$v_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\text{weight}(A) = \sum_{i \in A} w_i$
n	$w_n > 0$	$v_n$	$\text{value}(A) = \sum_{i \in A} v_i$

PROBLEMA DET.  $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  TALE CHE  
 -  $\text{weight}(S) \leq W$   
 -  $\text{value}(S)$  SIA MASSIMO

PROBLEMA DELLO ZAINO (VERSIONE FRAZIONARIA)  
(KNAPSACK PROBLEM)

CAPACITÀ DELLO ZAINO  $W \in \mathbb{N}$

OGGETTO	PESO	VALORE	
1	$w_1 > 0$	$v_1$	$A: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]$
2	$w_2 > 0$	$v_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\text{weight}(A) = \sum_{i=1}^n A(i) \cdot w_i$
n	$w_n > 0$	$v_n$	$\text{value}(A) = \sum_{i=1}^n A(i) \cdot v_i$

PROBLEMA DET.  $S: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]$  TALE CHE  
 -  $\text{weight}(S) \leq W$   
 -  $\text{value}(S)$  SIA MASSIMO

- ENTRAMBI I PROBLEMI GODONO DELLA PROPRIETA' DELLA SOTTOSTRUTTURA OTTIMA
- NEL CASO FRAZIONARIO E' POSSIBILE UTILIZZARE LA SEGUENTE STRATEGIA GREEDY CONSISTENTE NEL SELEZIONARE LA MASSIMA QUANTITA' DEL MATERIALE AVENTE VALORE SPECIFICO MASSIMO, COMPATIBILMENTE CON LA CAPIENZA RESIDUA DELLO ZAINO
- TALE STRATEGIA NON FUNZIONA PERO' PER LA VARIANTE INTERA CHE DIMOSTRA UNA BEN MAGGIORE COMPLESSITA' COMBINATORICA

OGGETTO	PESO	VALORE	VALORE/PESO
1	10	60	6
2	20	100	5
3	30	120	4

$$W = 50$$

CASO FRAZIONARIO

$$A(1) = 1 \quad \text{value}(A) = 1 \cdot 60 + 1 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 120 = 240$$

$$A(2) = 1$$

$$A(3) = \frac{2}{3}$$

CASO INTERO

$$A = \{1, 2\} \quad \text{value}(A) = 60 + 100 = 160$$

$$A' = \{2, 3\} \quad \text{value}(A') = 100 + 120 = 220$$