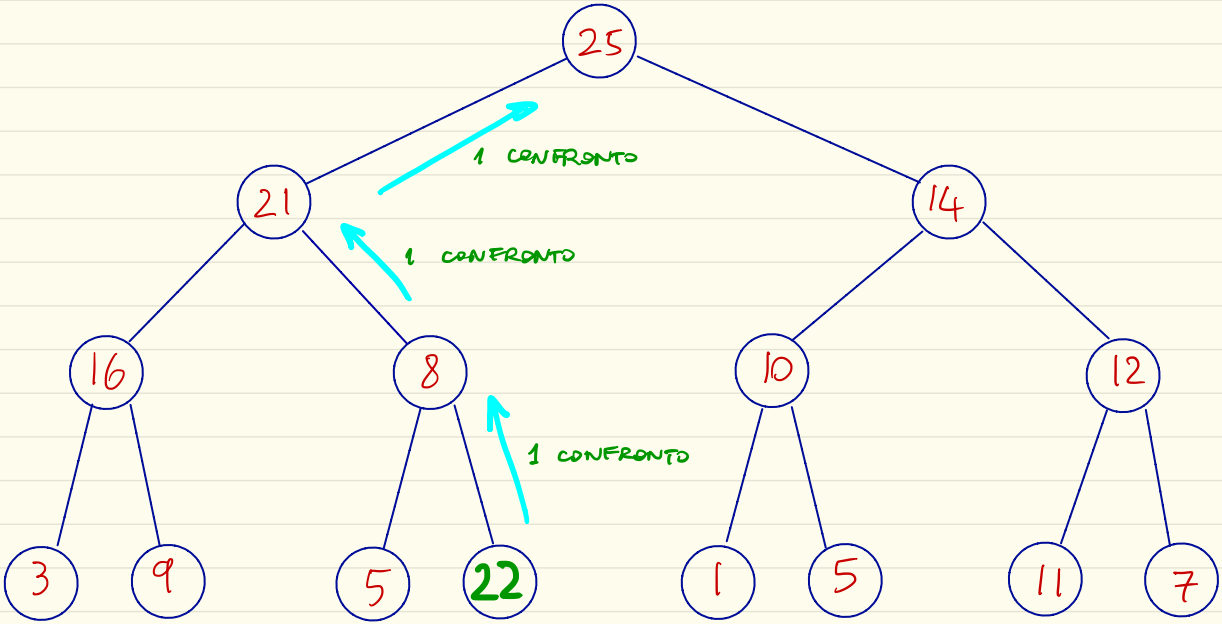
QuickHeapsort

Cantone-Cincotti (2000, 2002)
Dickert-Weiß (2015)

OSSERVAZIONE:

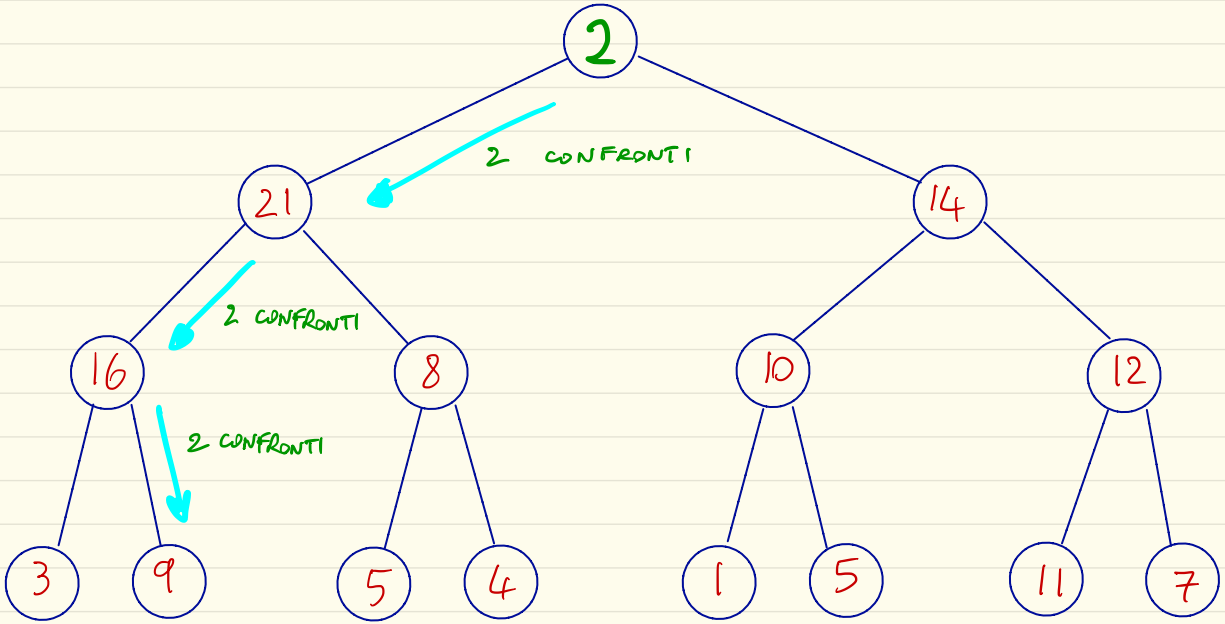
- IN UN HEAP (BINARIO) GLI ELEMENTI SI POSSONO MUOVERE
  - DAL BASSO VERSO L'ALTO (SIFT-UP)
    (ES. INSERT, INCREASE_KEY (IN UN MAX-HEAP))
  - DALL'ALTO VERSO IL BASSO (SIFT-DOWN)
    (ES. HEAPIFY, HEAPSORT)

SIFT-UP (RISALITA)



- DURANTE UN'OPERAZIONE DI SIFT-UP, PER CIASCUN LIVELLO VIENE EFFETTUATO UN SOLO CONFRONTO

SIFT-DOWN (DISCESA)



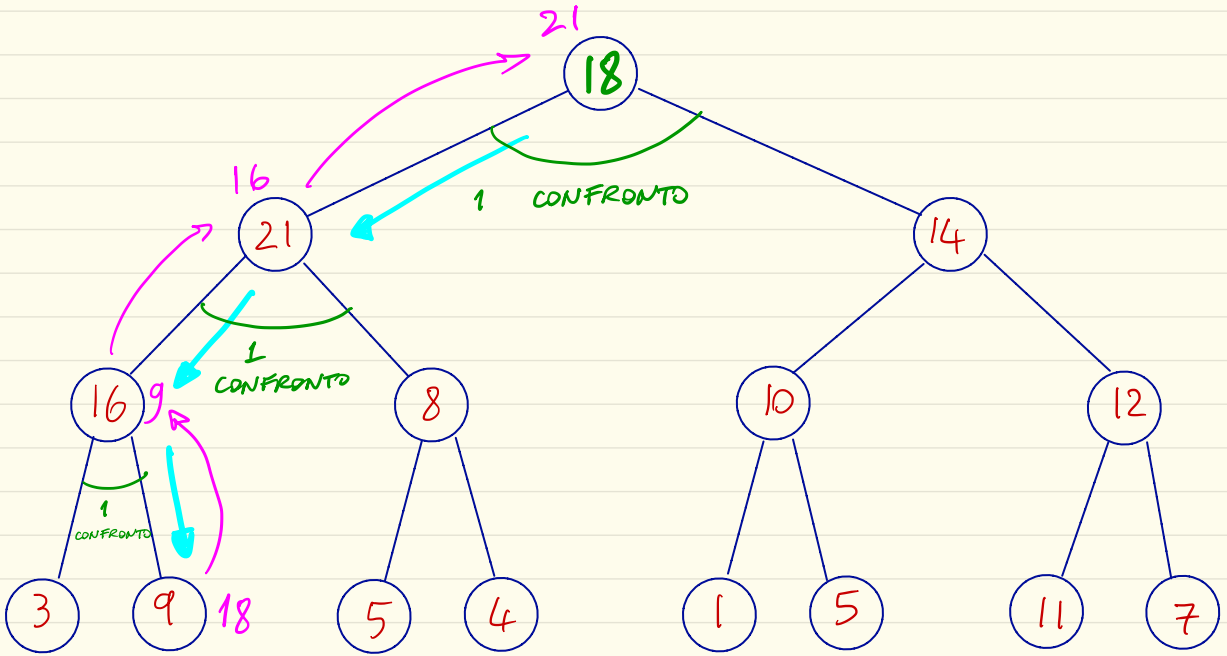
- DURANTE UN'OPERAZIONE DI SIFT-DOWN, PER CIASCUN LIVELLO VENGONO EFFETTUATI DUE CONFRONTI

- OLTRE AI CONFRONTI NECESSARI PER LA COSTRUZIONE DI UN HEAP, L'ESECUZIONE DI HEAPSORT PUO' DUNQUE RICHIEDERE SINO A $2\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor$ CONFRONTI

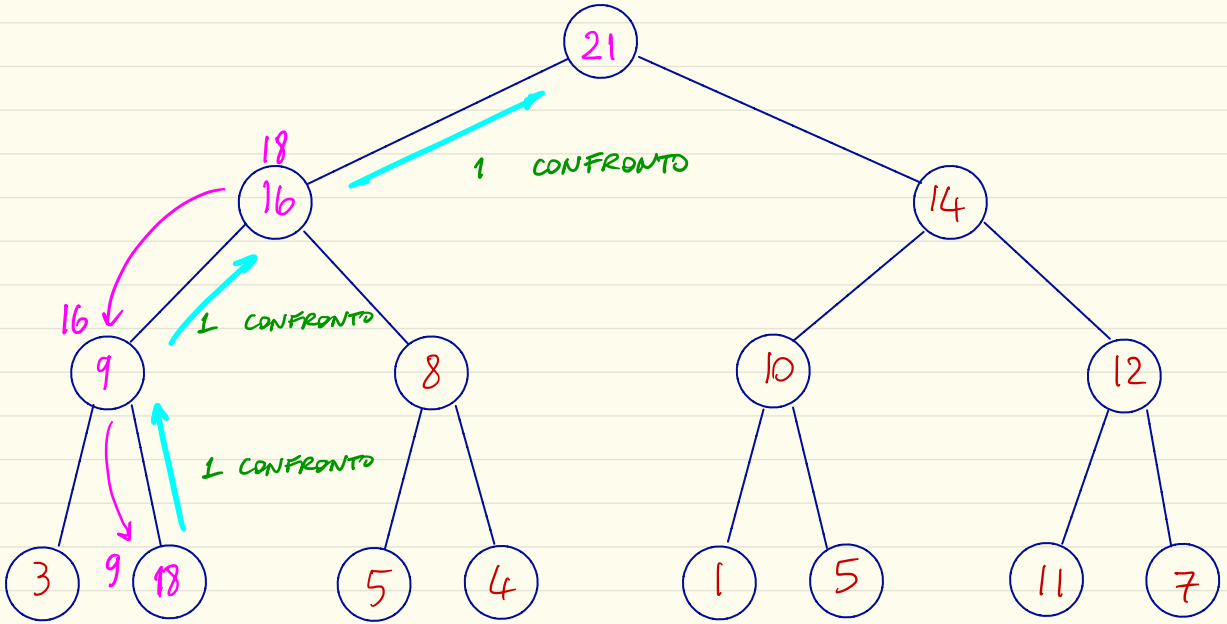
- E' POSSIBILE ABBASSARE IL VALORE DELLA COSTANTE 2?

- NELL'ALGORITMO BOTTOM-UP HEAPSORT C'E' UNA FASE INIZIALE DI DISCESA (SIFT-DOWN) CON UN SOLO CONFRONTO PER LIVELLO (COME SE LA CHIAVE FOSSE $-\infty$), SEGUITA DA UNA FASE DI RISALITA (SIFT-UP)

SIFT-DOWN (AD UN SOLO CONFRONTO)



SIFT-UP


21
18
16
1 CONFRONTO
14
16
1 CONFRONTO
9
8
10
12
1 CONFRONTO
3
9
18
5
4
1
5
11
7

BENCHE' MEDIAMENTE LE FASI DI RISALITA SIANO MOLTO LIMITATE NEL CORSO DELL'ESECUZIONE DELL'ALGORITMO HEAPSORT, UNA RISPOSTA POSITIVA ALLA SEGUENTE DOMANDA CONSENTIREBBE UN'ULTERIORE RIDUZIONE DEL NUMERO DI CONFRONTI

DOMANDA: E' POSSIBILE ELIMINARE DEL TUTTO LA FASE DI RISALITA (SIFT-UP), PUR UTILIZZANDO LA PROCEDURA DI DISCESA (SIFT-DOWN) AD UN SOLO CONFRONTO ?

UNA PRIMA SOLUZIONE (MA CON MEMORIA ESTERNA):

EXTERNAL-HEAPSORT

Procedure External-Max-Heapsort (A, Ext)

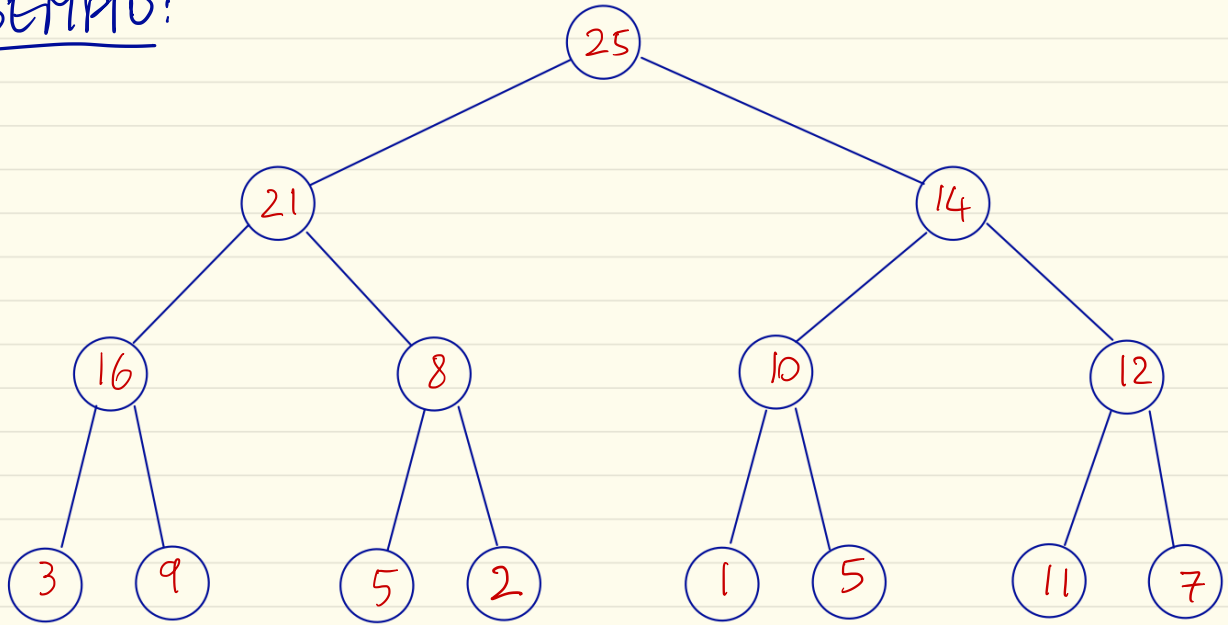
INPUT: ARRAY A ED Ext DELLA STESSA LUNGHEZZA

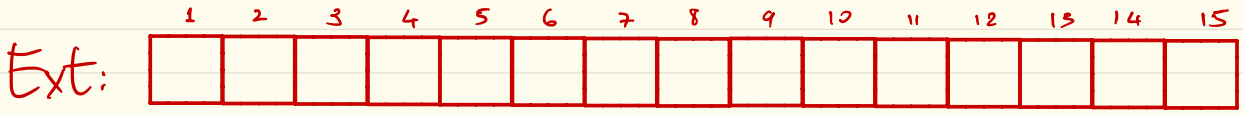
OUTPUT: ARRAY Ext E' UNA PERMUTAZIONE ORDINATA DI A

```
n := LENGTH[A]
BUILD-MAX-HEAP (A);
for j := n downto 1 do
    Ext[j] := A[1]
    l := Max-Special-Leaf (A)
    A[l] := ??
end_for;
end_procedure;
```

```
Function Max-Special Leaf (A)
n := LENGTH[A]
i := 2                                  /* FIGLIO SINISTRO DELLA RADICE */
while i < n do                          /* i HA UN FRATELLO */
    if A[i] < A[i+1] then i := i+1; end if;
    A[⌊i/2⌋] := A[i]                    /* FA RISALIRE DI UN LIVELLO IL MAX
                                           TRA A[i] E IL FRATELLO DI A[i] */
    i := 2·i;                           /* QUINDI SI SCENDE DI UN LIVELLO */
end_while;
if i = n then
    A[⌊i/2⌋] := A[n]
    i := 2i;
end_if;
return i/2;
end_function;
```

ESEMPIO:





- COME FARE A MENO DELL'ARRAY ESTERNO ?

- COME FARE A MENO DELL'ARRAY ESTERNO ?

  OVVIAMENTE, UTILIZZANDO SOLTANTO L'ARRAY DI INPUT $A[1..n]$

- E COME ?

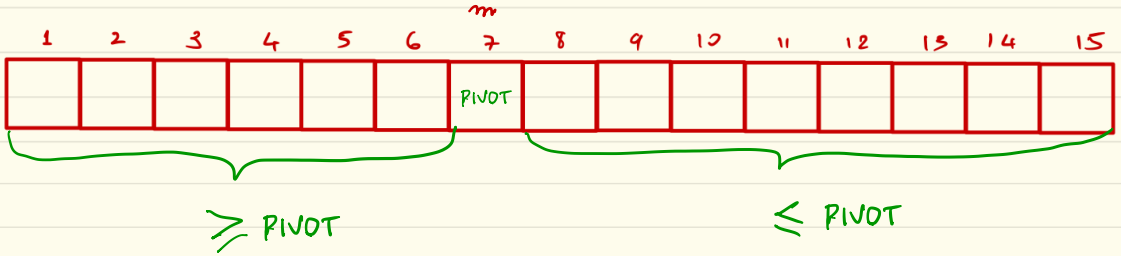
- COME FARE A MENO DELL'ARRAY ESTERNO ?

  OVVIAMENTE, UTILIZZANDO SOLTANTO L'ARRAY DI INPUT $A[1..n]$

- E COME ?

  UTILIZZANDO PARTE DELL'ARRAY $A[1..n]$ COME HEAP E PARTE COME ARRAY ESTERNO

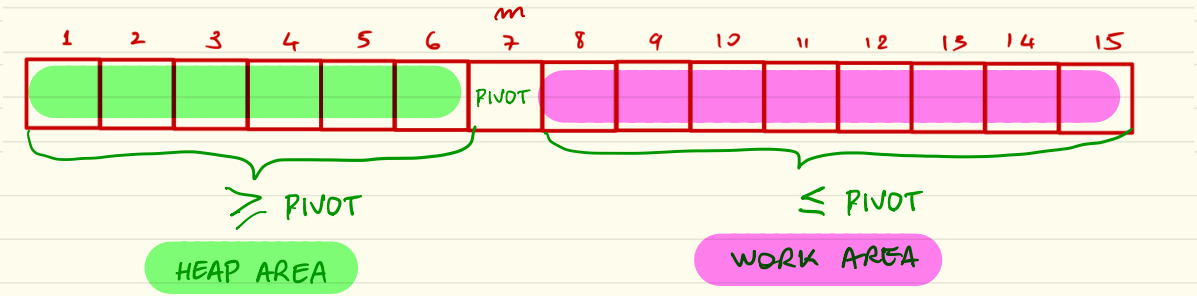
- INIZIALMENTE SI SELEZIONI UN PIVOT $PIVOT = A[p]$ IN $A[1..n]$
- QUINDI SI EFFETTUI UNA PARTIZIONE DI $A[1..n]$ IN DUE SUB-ARRAY $A[1..m-1]$, $A[m+1..n]$ TALI CHE:
  - $A[m] = PIVOT$
  - GLI ELEMENTI DI $A[1..m-1]$ SIANO $\geq$ PIVOT
  - GLI ELEMENTI DI $A[m+1..n]$ SIANO $\leq$ PIVOT



- LA PARTE PIÙ PICCOLA COSTITUIRA' L'HEAP AREA, MENTRE QUELLA PIÙ GRANDE COSTITUIRA' LA WORK AREA.

- SUPPONIAMO CHE $m \leq \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' L' HEAP AREA
  - $A[m+1..n]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA

ES.



- SI COSTRUISCA UN MAX-HEAP IN $A[1..m-1]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-HEAPSORT SU $A[1..m-1]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUBARRAY $A[n-m+2..n]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$

- SUPPONIAMO CHE $m \leq \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' L' HEAP AREA
  - $A[m+1..n]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA
- SI COSTRUISCA UN MAX-HEAP IN $A[1..m-1]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-HEAPSORT SU $A[1..m-1]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUBARRAY $A[n-m+2..n]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$

E GLI ELEMENTI CHE STAVANO IN $A[n-m+2..n]$ DOVE VANNO A FINIRE ?

- SUPPONIAMO CHE $m \leq \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' L' HEAP AREA
  - $A[m+1..n]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA
- SI COSTRUISCA UN MAX-HEAP IN $A[1..m-1]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-HEAPSORT SU $A[1..m-1]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUBARRAY $A[n-m+2..n]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$

E GLI ELEMENTI CHE STAVANO IN $A[n-m+2..n]$ DOVE VANNO A FINIRE ?

SONO UTILIZZATI AL POSTO DI $-\infty$!

Procedure External-Max-Heapsort (A, Ext)

INPUT : ARRAY A ED Ext DELLA STESSA LUNGHEZZA

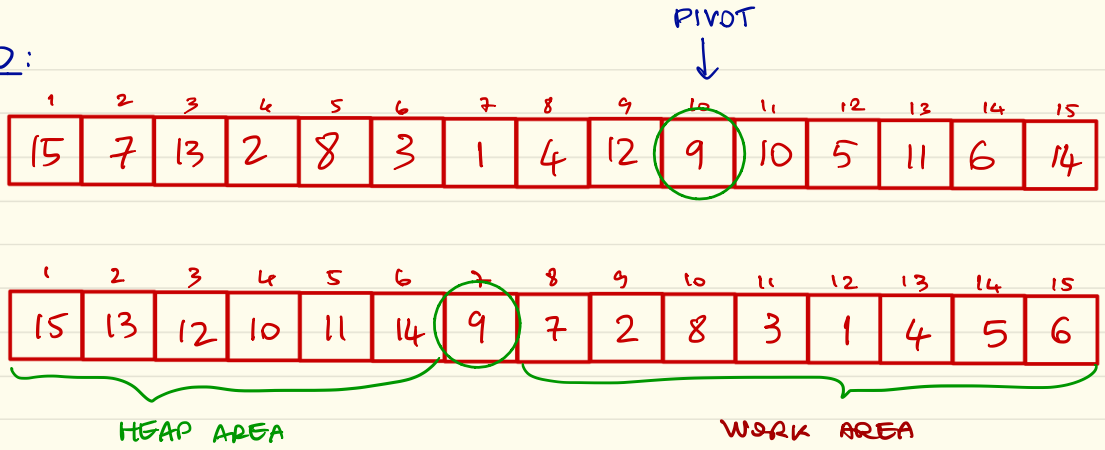
OUTPUT : ARRAY Ext E' UNA PERMUTAZIONE ORDINATA DI A

```
n := LENGTH[A]
BUILD-MAX-HEAP (A);
for j := n downto 1 do
    temp := Ext[j]
    Ext[j] := A[1]
    l := Special-Leaf (A)
    A[l] := temp
end_for;
end_procedure;
```

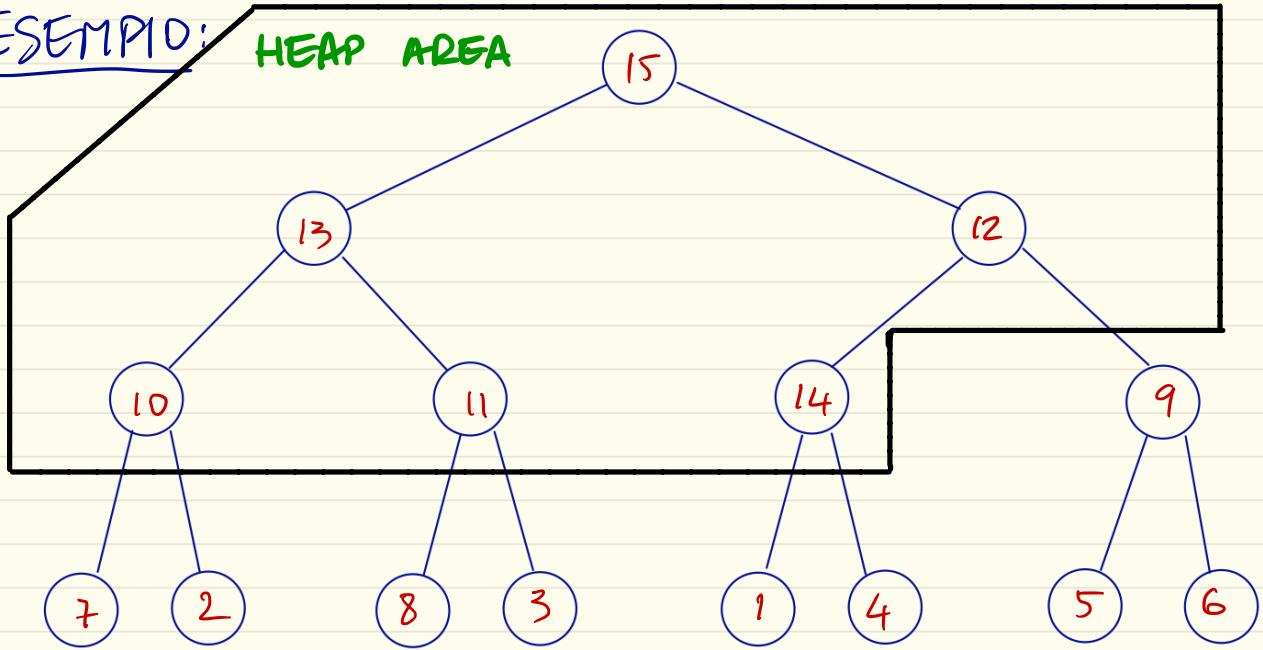
- SUPPONIAMO CHE $m \leq \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' L' HEAP AREA
  - $A[m+1..m]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA
- SI COSTRUISCA UN MAX-HEAP IN $A[1..m-1]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-HEAPSORT SU $A[1..m-1]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUB-ARRAY $A[n-m+2..n]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$
- IL SUB-ARRAY $A[n-m+1..n]$ RISULTERA'
  - ORDINATO
  - $A[i] \leq A[j]$, PER $1 \leq i \leq n-m < j \leq n$.

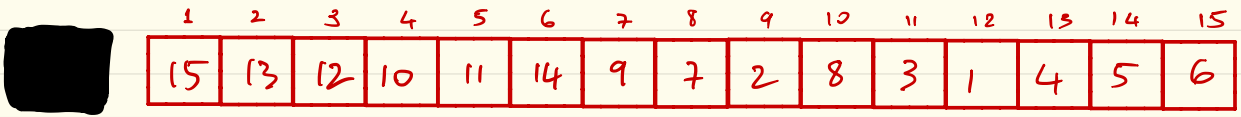
DUNQUE BASTERA' ORDINARE RICORSIVAMENTE IL SUB-ARRAY $A[1..n-m]$ PER COMPLETARE L'ORDINAMENTO.

ESEMPIO:

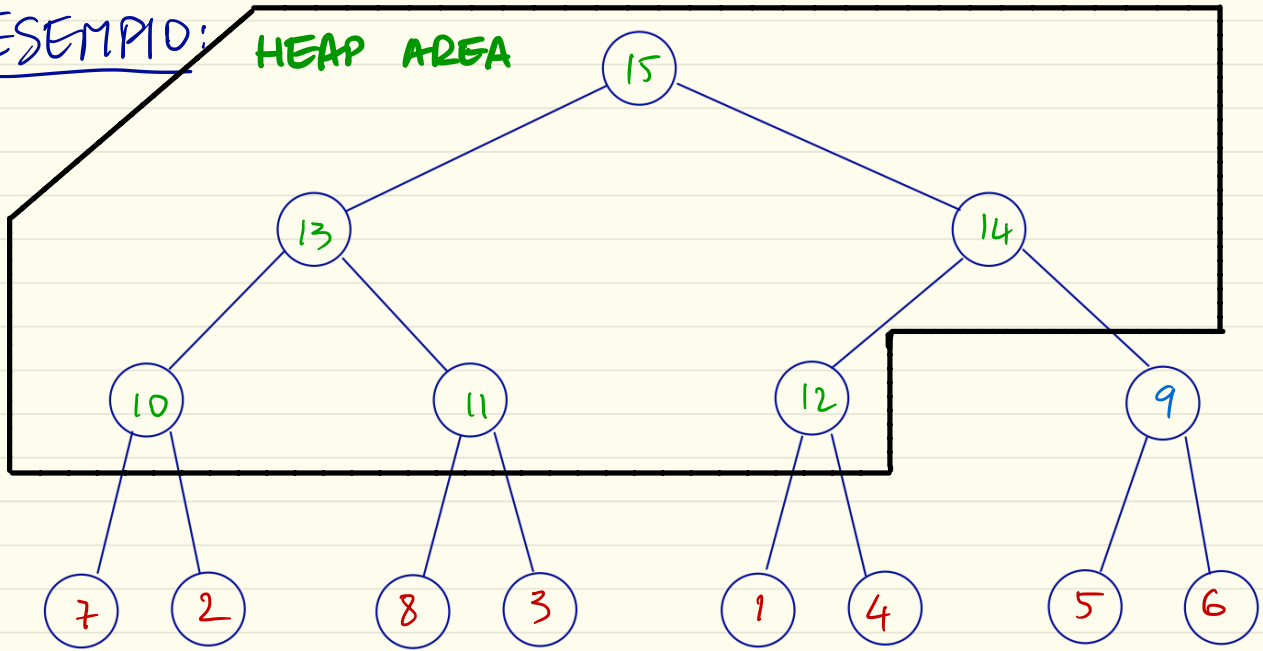

PIVOT
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 7 13 2 8 3 1 4 12 9 10 5 11 6 14
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 13 12 10 11 14 9 7 2 8 3 1 4 5 6
HEAP AREA
WORK AREA

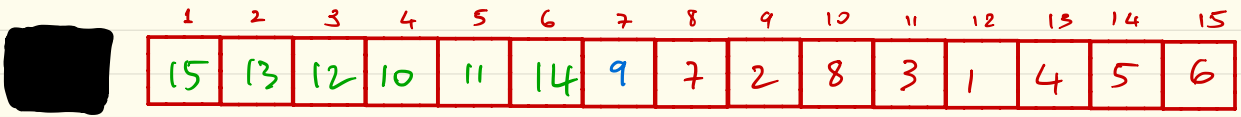
ESEMPIO: HEAP AREA





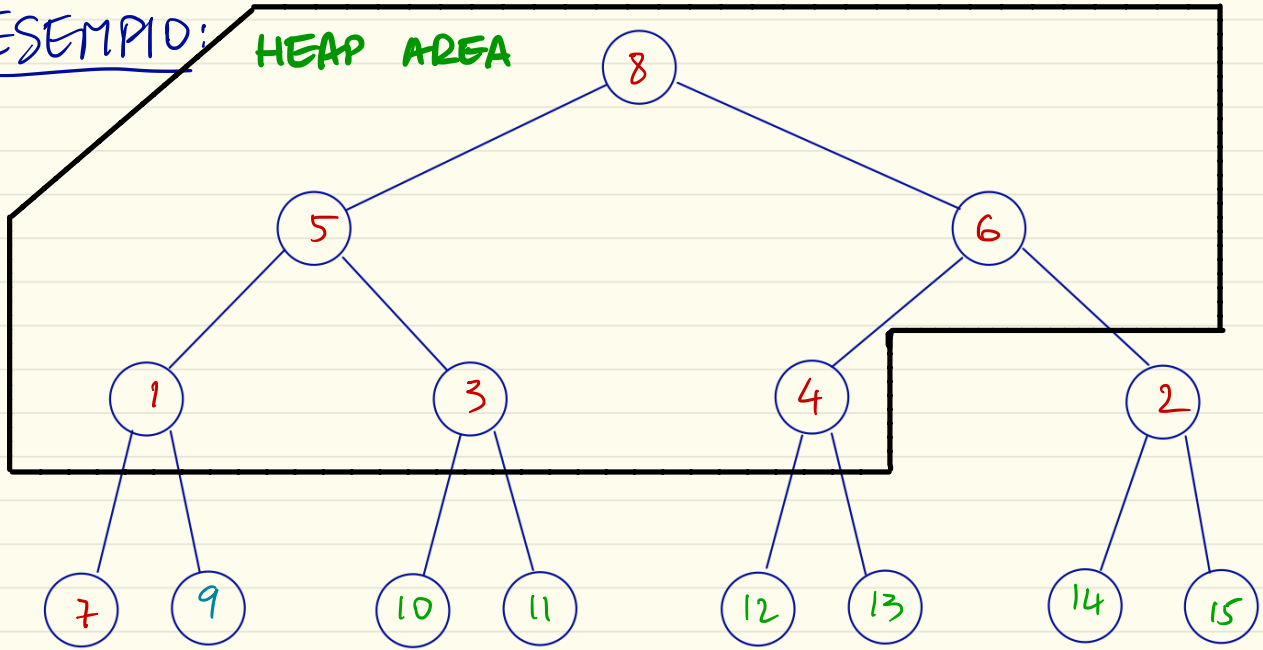
ESEMPIO:

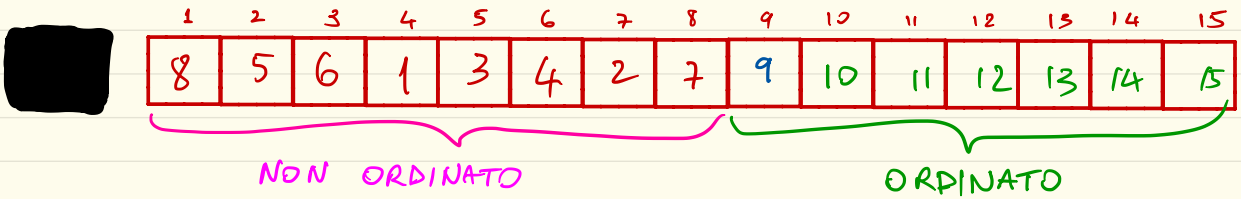

HEAP AREA
15
13
14
10
11
12
9
7
2
8
3
1
4
5
6


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 13 12 10 11 14 9 7 2 8 3 1 4 5 6

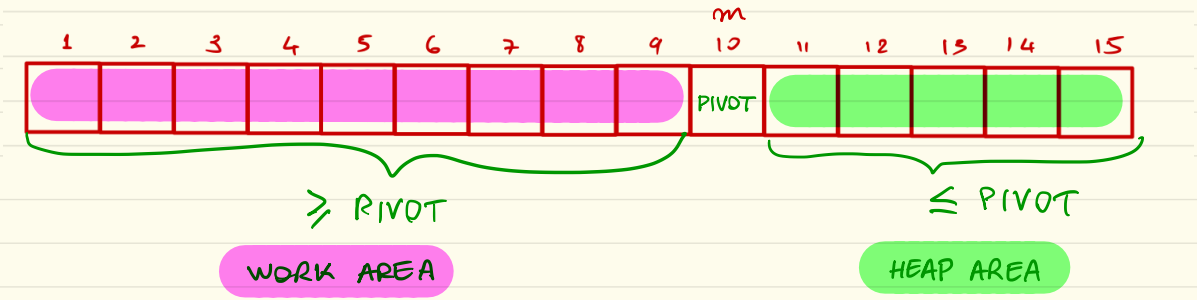
ESEMPIO:

HEAP AREA





- SUPPONIAMO ORA CHE $m > \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[m+1..n]$ COSTITUIRA' L' HEAP AREA
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA

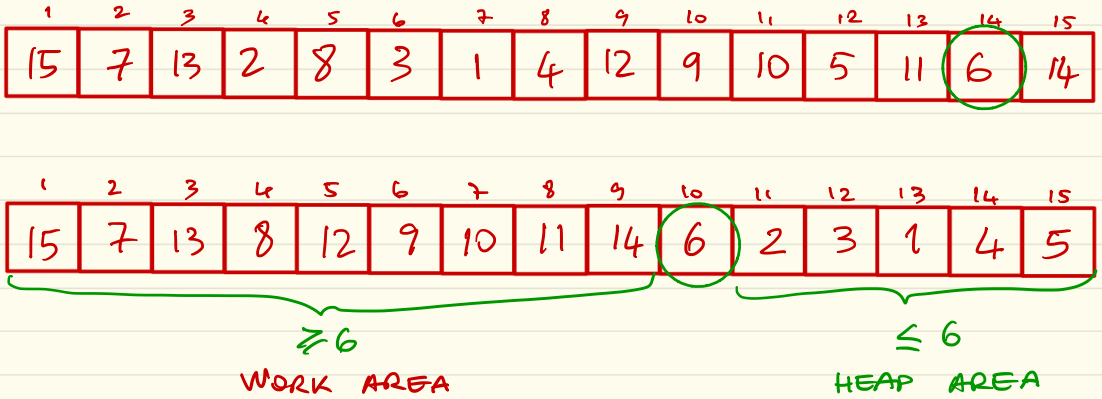


- SI COSTRUISCA UN MIN-HEAP IN $A[m+1..n]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-MIN-HEAPSORT SU $A[m+1..n]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUBARRAY $A[1..m-1]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$

- SUPPONIAMO ORA CHE $m > \frac{n+1}{2}$
- IN TAL CASO
  - $A[m+1..n]$ COSTITUIRA' L'HEAP AREA
  - $A[1..m-1]$ COSTITUIRA' LA WORK AREA
- SI COSTRUISCA UN MIN-HEAP IN $A[m+1..n]$
- SI ESEGUA L'ALGORITMO EXTERNAL-MIN-HEAPSORT SU $A[m+1..n]$ CONSIDERANDO COME ARRAY ESTERNO IL SUBARRAY $A[1..m-1]$
- QUINDI SI SCAMBINO I VALORI DI $A[m]$ E $A[n-m+1]$
- IL SUB-ARRAY $A[n-m+1]$ RISULTERA'
  - ORDINATO
  - $A[i] \leq A[j]$, PER $1 \leq i \leq n-m+1 < j \leq n$.

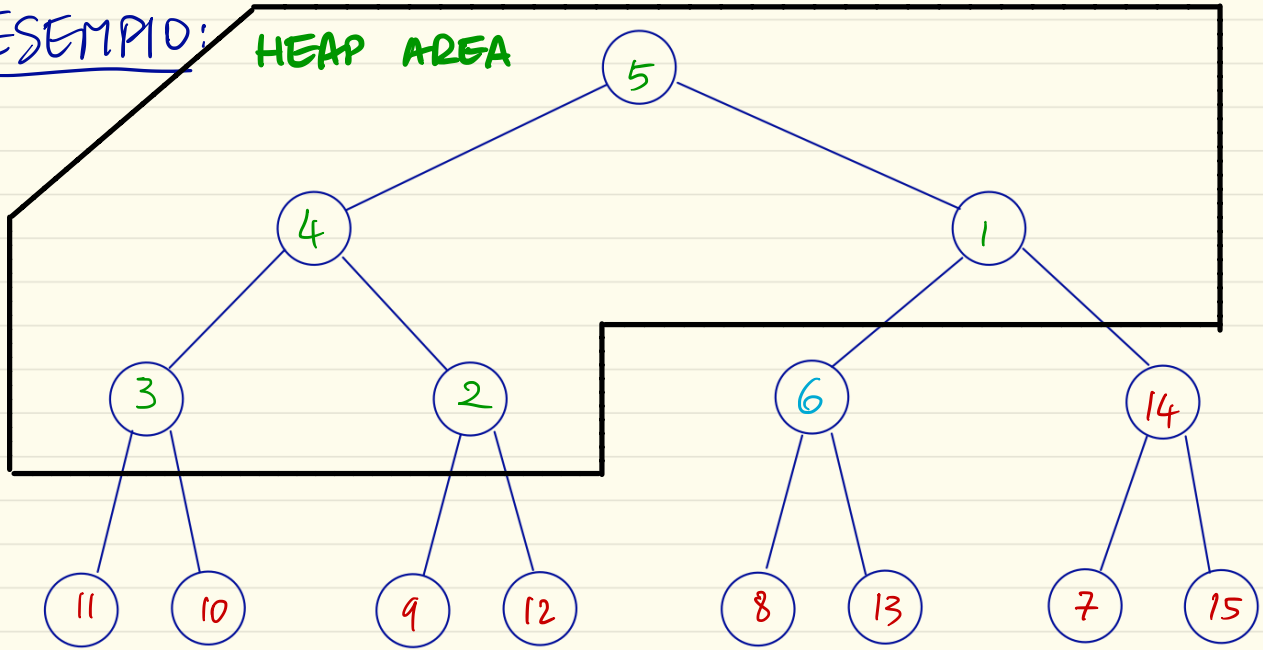
DUNQUE BASTERA' ORDINARE RICORSIVAMENTE IL SUB-ARRAY $A[n-m+2..n]$ PER COMPLETARE L'ORDINAMENTO.

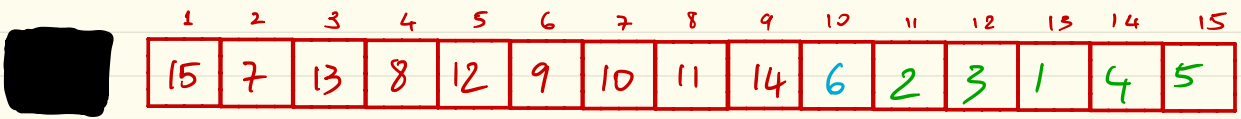
ESEMPIO:


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 7 13 2 8 3 1 4 12 9 10 5 11 6 14
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
15 7 13 8 12 9 10 11 14 6 2 3 1 4 5
≥ 6
WORK AREA
≤ 6
HEAP AREA

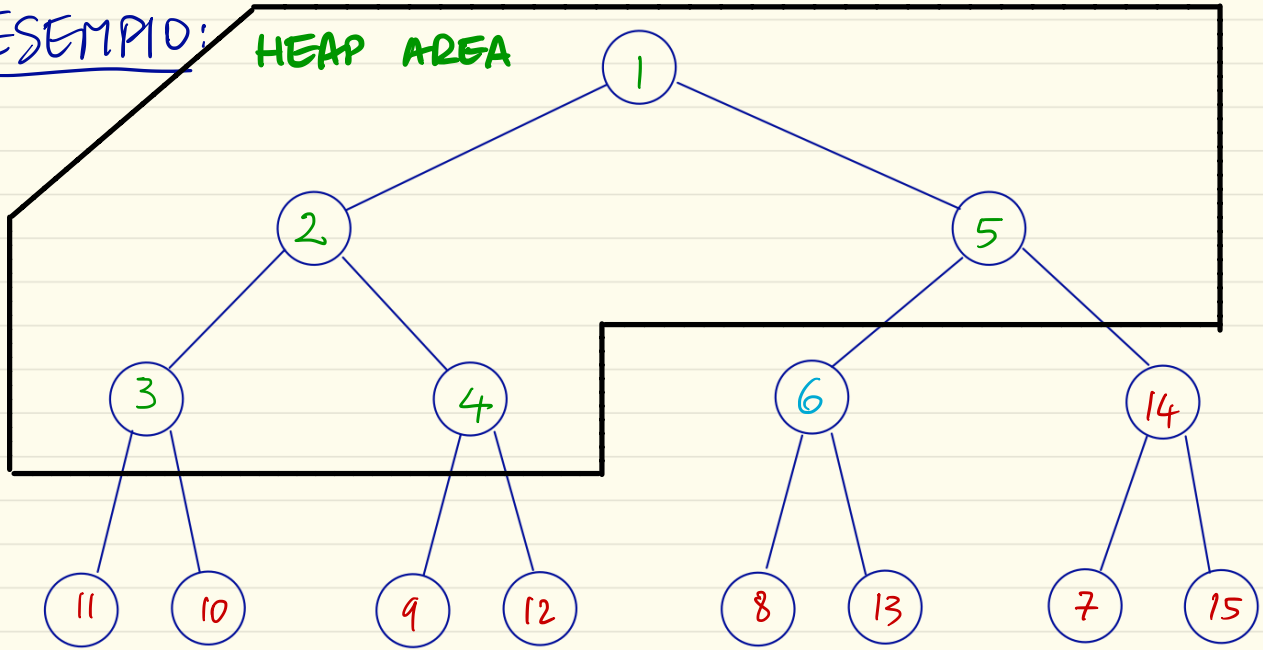
ESEMPIO:

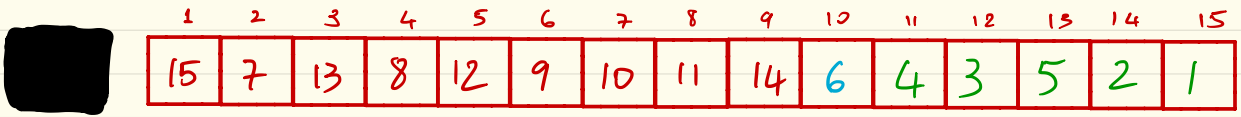
HEAP AREA





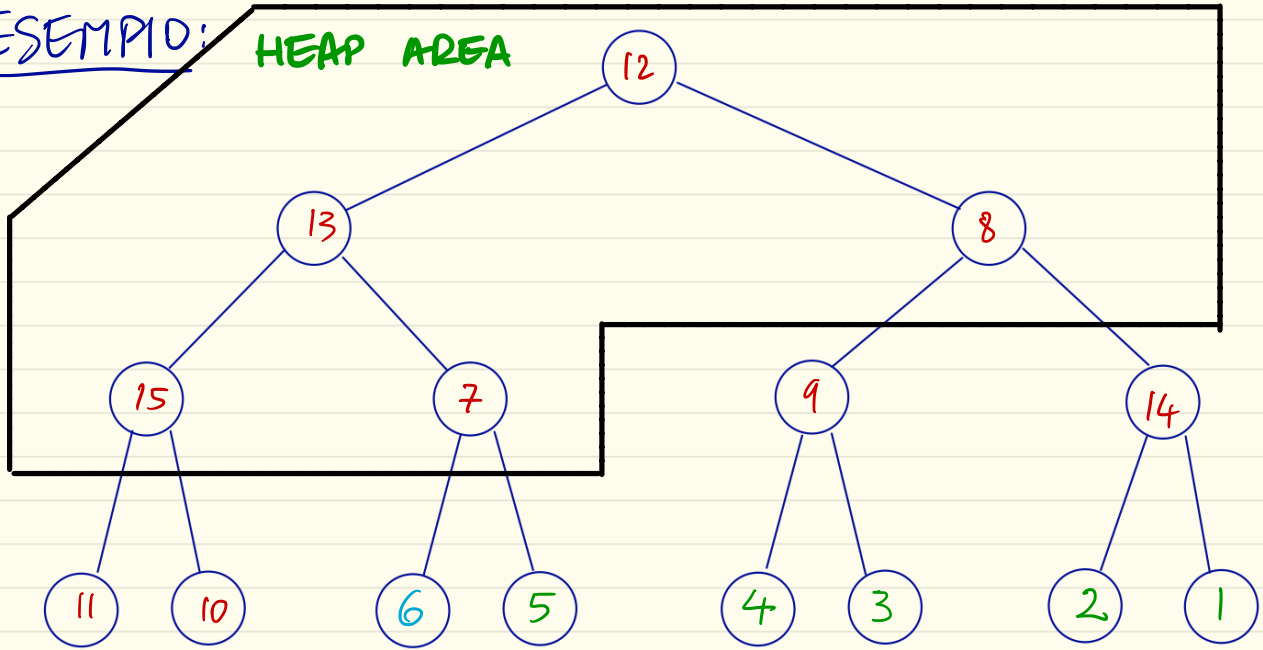
ESEMPIO: HEAP AREA

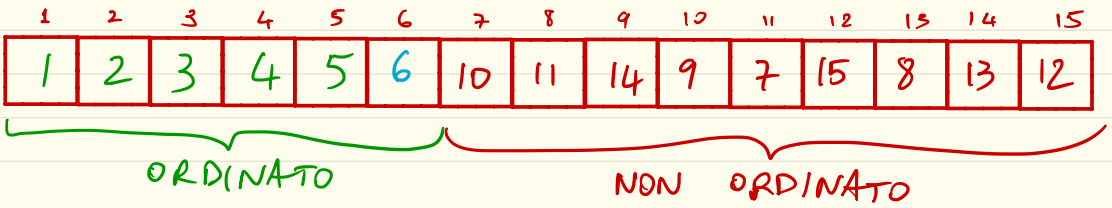




ESEMPIO:

HEAP AREA





ESEMPIO


WORK AREA
HEAP AREA
SORTED AREA
WHITE
UNSORTED AREA
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
ecc.

```
procedure QuickHeapsort(A);
n := LENGTH(A);
if n > 1 then
    PIVOT := CHOOSE-PIVOT(A);
    m := PARTITION-REVERSE(A, PIVOT);
    if m ≤ (n+1)/2 then
        External-Max-Heapsort(A[1..m-1], A[n-m+2..n]);
        Exchange(A[m], A[n-m+1])
        QuickHeapsort(A[1..n-m])
    else
        External-Min-Heapsort(A[m+1..n], A[1..n-m]);
        Exchange(A[m], A[n-m+1]);
        QuickHeapsort(A[n-m+2..n]);
    end_if;
end_if;
end_procedure;
```

Procedure External-Min-Heapsort (A, Ext)

INPUT : ARRAY A ED Ext DELLA STESSA LUNGHEZZA

OUTPUT : ARRAY Ext E' UNA PERMUTAZIONE ORDINATA DI A

```
n := LENGTH[A]
BUILD-MIN-HEAP (A);
for j := 1 downto n do
    temp := Ext[j]
    Ext[j] := A[1]
    l := Min-Special-Leaf (A)
    A[l] := temp
end_for;
end_procedure;
```

```
Function Min-Special Leaf (A)
n := LENGTH[A]
i := 2                                   /* FIGLIO SINISTRO DELLA RADICE */
while i < n do                           /* i HA UN FRATELLO */
    if A[i] > A[i+1] then i := i+1; end if;
    A[⌊i/2⌋] := A[i]                     /* FA RISALIRE DI UN LIVELLO IL MIN
                                            TRA A[i] E IL FRATELLO DI A[i] */
    i := 2·i;                            /* QUINDI SI SCENDE DI UN LIVELLO */
end_while;
if i = n then
    A[⌊i/2⌋] := A[n]
    i := 2i;
end_if;
return i/2;
end_function;
```

COMPLESSITA'

Theorem 1 *The expected number $\mathbb{E}[T(n)]$ of comparisons by basic (resp. improved) QuickHeapsort with pivot as median of k randomly selected elements on an input array of size n satisfies $\mathbb{E}[T(n)] \le n \lg n + c_k n + o(n)$ with c_k as follows:*

k	c_k basic QHS variant (Cantone-Cincotti)	c_k improved QHS variant (Diekert-Weiss)
1	+2.72	+1.97
3	+1.92	+1.17
$f(n)$	+0.72	−0.03

2.996

old result (2002) basic QHS

The last row is valid for all $f \in \omega(1) \cap o(n)$ with $1 \le f(n) \le n$, e.g., $f(n) = \sqrt{n}$.

Clever Quicksort needs $1.18n \log_2 n$ comparisons on average

L'ANALISI DI DIEKERT-WEISS SI BASA SU UN ALGORITMO OTTIMIZZATO PER LA COSTRUZIONE DI UN HEAP APPARSO NEL 2012:

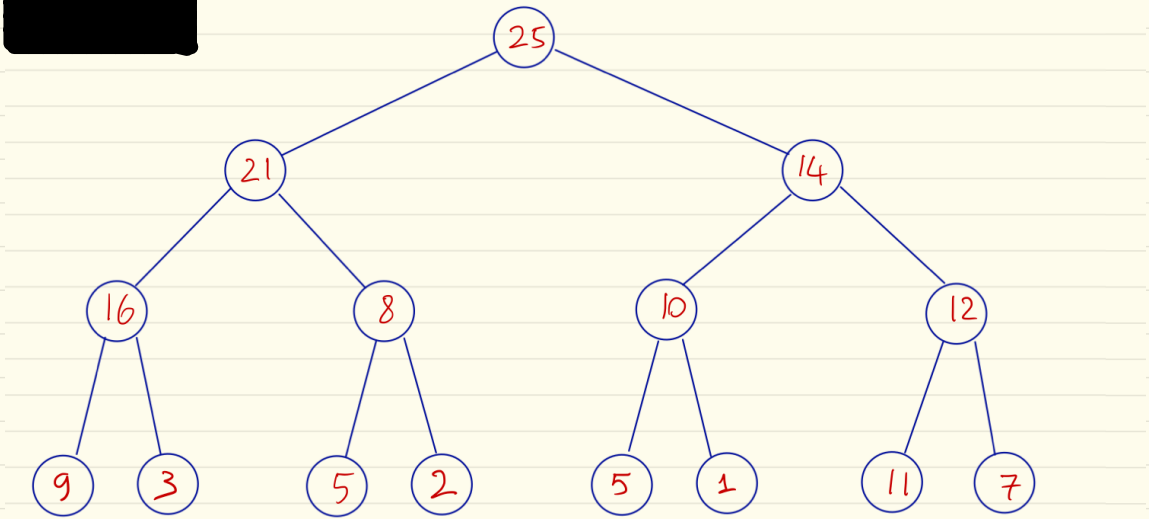
Chen, J., Edelkamp, S., Elmasry, A., Katajainen, J.: In-place Heap Construction with Optimized Comparisons, Moves, and Cache Misses. In: B. Rovan, V. Sassone, P. Widmayer (eds.) MFCS, vol. 7464 of LNCS, pp. 259–270. Springer (2012)

UN MIGLIORAMENTO PER RISPARMIARE CIRCA $\frac{3}{4}n$ CONFRONTI

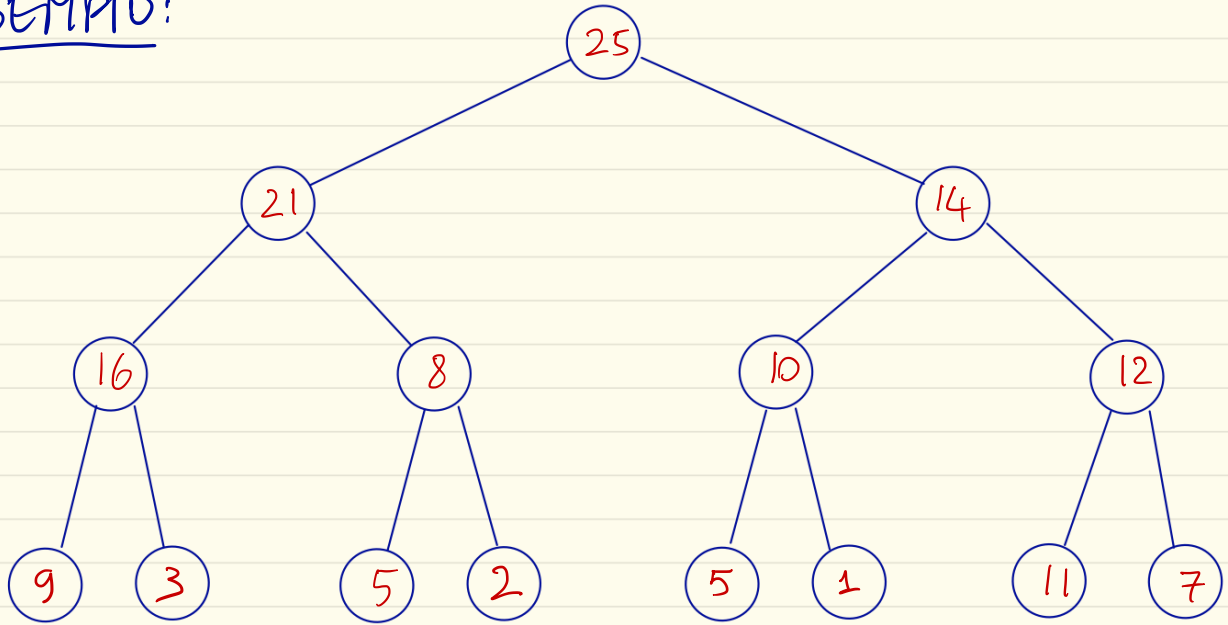
(DIEKERT-WEISS, 2015)

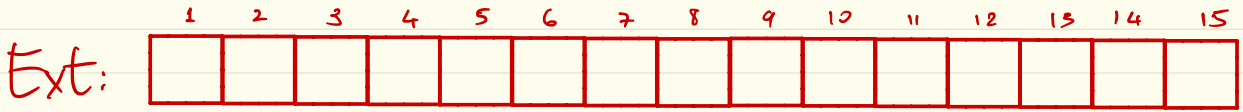
- E' SUFFICIENTE ORDINARE LE FOGLIE CON UNO STESSO PADRE IN SENSO NON-DECRESCENTE, NEL CASO DI MAX-HEAP, E IN SENSO NON-CRESCENTE, NEL CASO DI MIN-HEAP, MANTENENDO POI TALE ORDINAMENTO DOPO OGNI ESTRAZIONE

[redacted]



ESEMPIO:





LEMMA LET $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. THEN

$$\alpha < i < \beta \iff \lfloor \alpha \rfloor + 1 \leq i \leq \lceil \beta \rceil - 1 .$$ □

Fathers of two leaves can be characterized as follows:

In a heap with n elements,
node i is father of two leaves $\iff 2i+1 \leq n \;\&\; 4i > n$

$$\iff n < 4i \leq 2n - 2$$

$$\iff \frac{n}{4} < i \leq \frac{2n-1}{4}$$

$$\iff \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{2n-2}{4} \right\rfloor$$ □

Hence, in a heap with n nodes, the number of nodes that are fathers of two leaves is:

$$\left\lfloor \frac{2n-2}{4} \right\rfloor - \left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 \right) + 1 = \left\lfloor \frac{2n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

LEMMA $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \frac{2n-2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$. □

h_i := dimension of i-th heap
t := total number of heaps = total number of pivots

We have: $\sum_{i=1}^{t} h_i = n - t$

The expected value of t is $O(\lg n)$.

The total number of comparisons due to the sift-down phase is:

basic QHS → $\sum_{i=1}^{t} 2\lfloor \lg h_i \rfloor \cdot (h_i - 1)$

improved QHS → $\sum_{i=1}^{t} \left[2\lfloor \lg h_i \rfloor \cdot (h_i - 1) - (h_i - 1) \right]$

gross saving → $\sum_{i=1}^{t} h_i - t = n - 2t$

extra cost of improved QHS → $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$

net saving → $n - 2t - \left(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \right) \geq n - 2t - \frac{n}{4} - 1 = \frac{3}{4}n - 2t - 1$

Expected net saving → $\frac{3}{4}n - O(\lg n) \simeq 0.75n$

$n - 2t$ $\qquad$ $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$

and put the right one at the place of the former left one. Summing up over all heaps during an execution of standard QuickHeapsort, we invest $\frac{n+2t}{4}$ comparisons in order to save n comparisons, where t is the number of recursive calls. The expected number of t is in $\mathcal{O}(\log n)$. Hence, we can expect to save $\frac{3n}{4} + \mathcal{O}(\log n)$ comparisons. We call this version the *improved* variant of QuickHeapsort.