# RICORRENZE

- EQUAZIONI O DISEQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DEL SUO VALORE CON INPUT PIÙ PICCOLI

ES.
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{SE } n > 1 \end{cases}$$

CON SOLUZIONE $T(n) = \Theta(n \lg n)$

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI TRE METODI
  - METODO DI SOSTITUZIONE
  - METODO ITERATIVO O DELL'ALBERO DI RICORSIONE
  - METODO "MASTER" PER RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad \text{CON } a \geq 1,\ b > 1$$

# METODO DI SOSTITUZIONE

1. INDOVINARE UNA POSSIBILE SOLUZIONE
2. VERIFICARE LA SOLUZIONE PER INDUZIONE

ES. DETERMINARE UN LIMITE SUPERIORE PER $T(n)$, OVE

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

VERIFICHIAMO CHE $T(n) = O(n \lg n)$, CIOE'

$T(n) \leq c\, n \lg n$ PER QUALCHE $c>0$ E PER $n$ SUFFICIENTEMENTE GRANDE

SUPPONIAMO CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$

ALLORA:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c\, n \lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= c\, n \lg n - c\, n \lg 2 + n \\
&= c\, n \lg n - c\, n + n \\
&\leq c\, n \lg n
\end{aligned}
$$

PER $n \geq 2$, $c \geq \max\left(\frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}, 1\right)$

# RAFFORZAMENTO DELL'IPOTESI INDUTTIVA

SI DIMOSTRI CHE LA RICORRENZA

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

HA SOLUZIONE $T(n) = O(n)$.

OCCORRE VERIFICARE CHE $T(n) \leq cn$, PER QUALCHE $c > 0$, $\forall n \geq n_0$

SUPPONIAMO INDUTTIVAMENTE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor$, $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c\lceil n/2 \rceil$.

ALLORA: $T(n) \leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \leq cn$ !

RAFFORZIAMO L'IPOTESI INDUTTIVA: $T(n) \leq cn + b$.

SI HA:

$$T(n) \leq \left(c\lfloor n/2 \rfloor + b\right) + \left(c\lceil n/2 \rceil + b\right) + 1 = cn + 2b + 1 \leq cn + b$$

PER $b \leq -1$, $c \geq T(1) - b$, $n \geq 1$.

# ATTENZIONE AGLI ERRORI!

DATA $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, CERCHIAMO DI DIMOSTRARE CHE $T(n) = O(n)$ (FALSO!)

SUPPONIAMO PER INDUZIONE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$.

ALLORA

$$T(n) \leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \leq cn + n = (c+1)n = O(n)$$

$\Uparrow$

ERRORE!

OCCORREREBBE INFATTI DIMOSTRARE CHE $T(n) \leq cn$, CON LA MEDESIMA COSTANTE $c$.

## CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$T(n) = 2\,T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = 2\,T(\lfloor n^{\frac{1}{2}} \rfloor) + \lg n$$

$$\Rightarrow \quad T(2^{\lg n}) = 2\,T(\lfloor 2^{\lg n/2} \rfloor) + \lg n$$

PONIAMO $S(m) = T(2^m)$.

$$\Rightarrow \quad S(\lg n) = 2\,S\left(\left\lfloor \frac{\lg n}{2} \right\rfloor\right) + \lg n$$

SI CONSIDERI LA RICORRENZA: $S(m) = 2\,S\left(\frac{m}{2}\right) + m$

ESSA HA SOLUZIONE $S(m) = \Theta(m \lg m)$, DA CUI

$$S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n).$$

PERTANTO $T(n) = T(2^{\lg n}) = S(\lg n) = \Theta(\lg n \lg \lg n)$,

# ESERCIZI

- RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI DI RICORRENZA:

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$

# METODO ITERATIVO

- CONSISTE NELL'ESPANDERE LA RICORRENZA SINO AD ESPRIMERE LA FUNZIONE IN TERMINI DI $n$ E DELLE CONDIZIONI INIZIALI

ES. $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

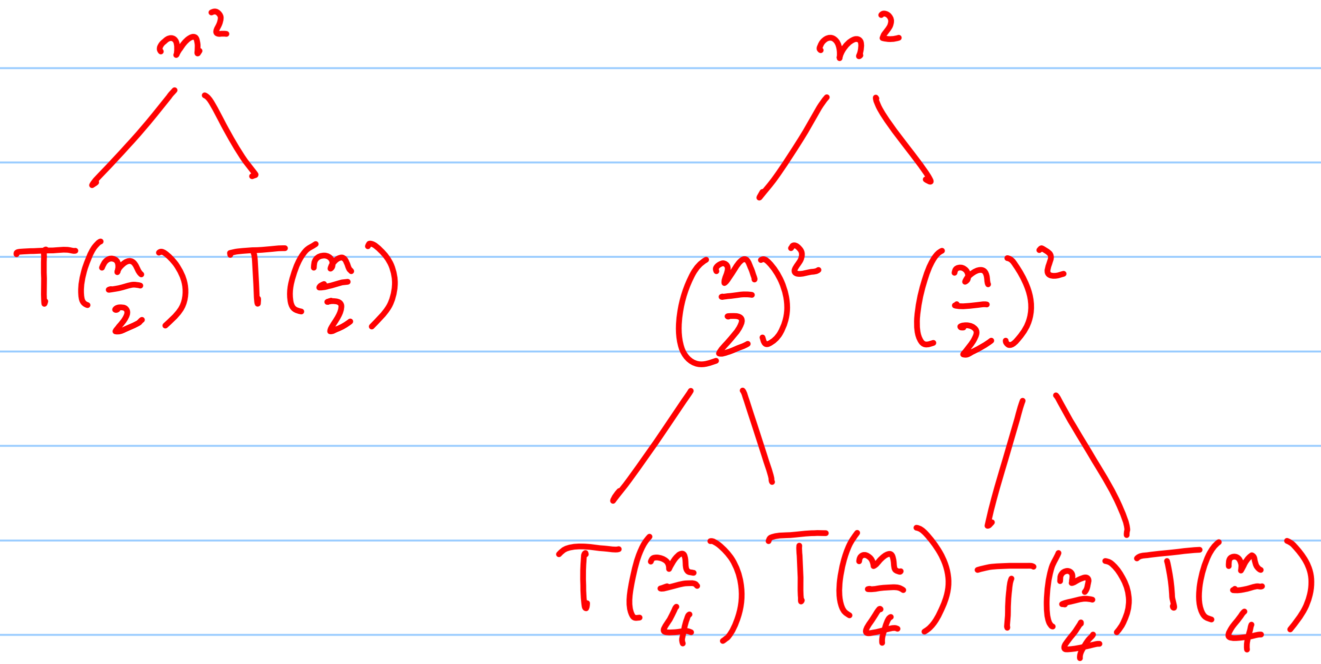
$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor\right)\right) \\
&= n + 3\left(\lfloor n/4 \rfloor + 3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor + 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right)\right)\right) \\
&= n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor + 3^3 T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right) \\
&\ldots \\
&\leq n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \ldots + 3^{\log_4 n} \Theta(1) \\
&\leq n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) \\
&= 4n + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right) = O(n)
\end{aligned}
$$

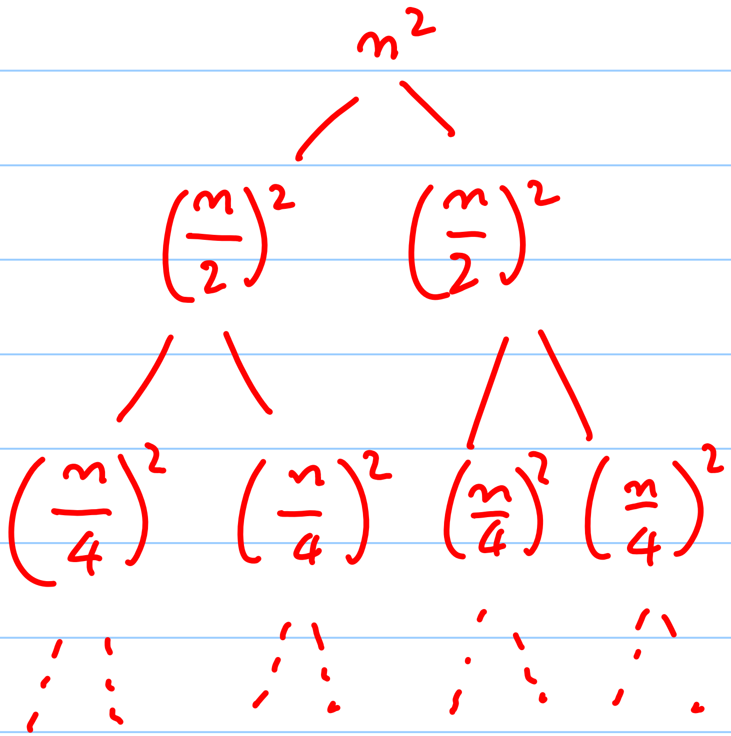
# ALBERI DI RICORSIONE

- SONO PARTICOLARMENTE UTILI NELL' APPLICAZIONE DEL METODO ITERATIVO

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

$T(n)$






$$n^2$$

$$\frac{1}{2} n^2$$

$$\frac{1}{4} n^2$$

$$\frac{1}{8} n^2$$

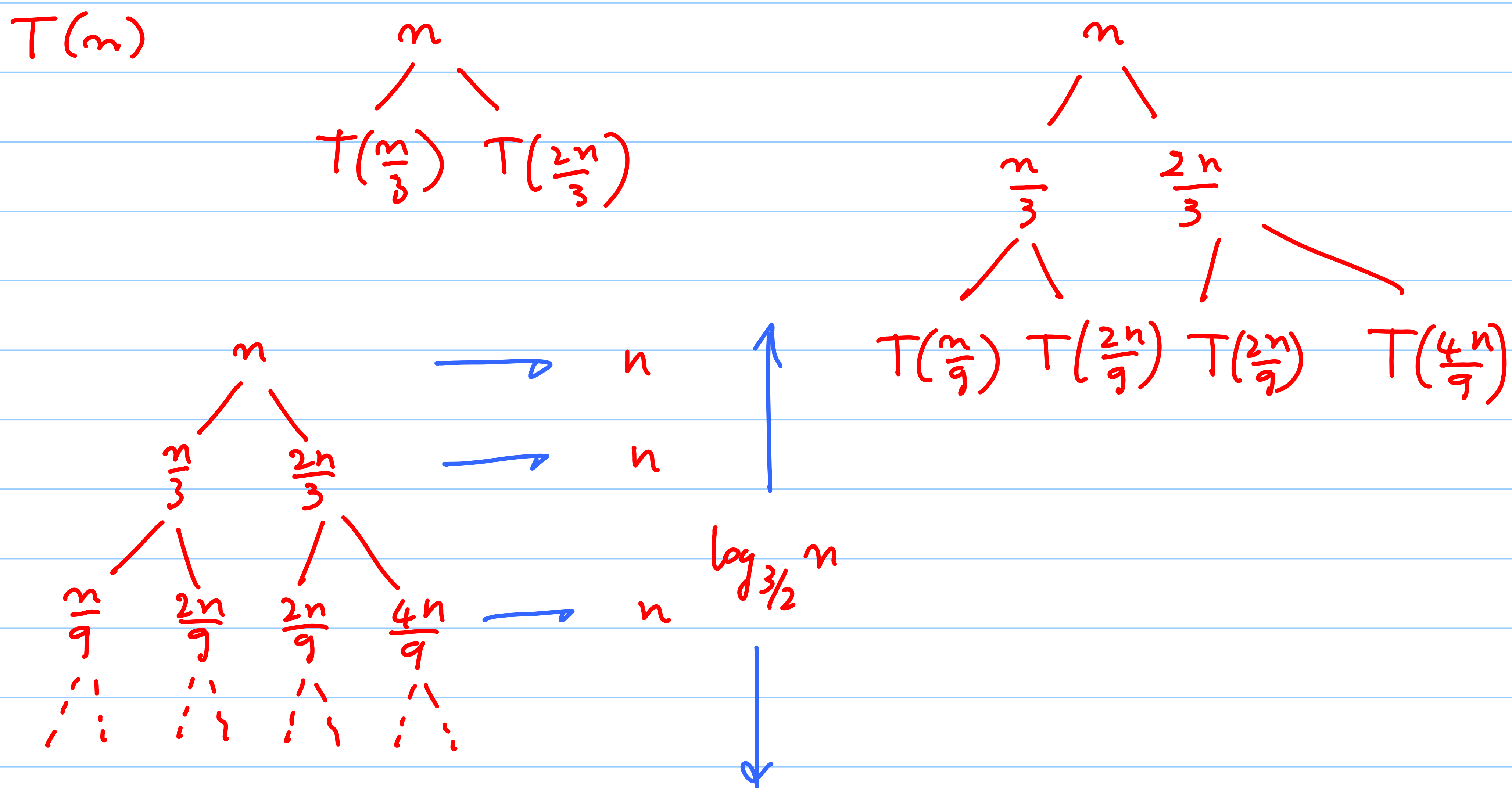
$$\vdots$$

$\log n$

$$n^2 \sum_{i=0}^{\log n} \frac{1}{2^i} = \Theta(n^2)$$

Es.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$




$$n \log_{3/2} n = \Theta(n \log n)$$

# ESERCIZI

**4.3-1**

Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.

- RISOLVERE L'EQUAZIONE $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$

# RICORRENZE DELLA FORMA $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

**TEOREMA "MASTER":** SIANO $a \geq 1$, $b > 1$ COSTANTI E
SIA $f(n)$ UNA FUNZIONE ASSEGNATA.
SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$,

1. SE $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$,
   ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

2. SE $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$, ALLORA $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \lg n\right)$

3. SE $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$ E SE
   CONDIZIONE DI REGOLARITA'
   $a\,f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c\,f(n)$ PER QUALCHE $c < 1$ E PER VALORI DI $n$ SUFFICIENTEMENTE GRANDI,
   ALLORA $T(n) = \Theta(f(n))$.

## GENERALIZZAZIONE

IL CASO 2 PUÒ ESSERE GENERALIZZATO:

2'. SE $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^k n)$, CON $k \geq 0$,

ALLORA $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^{k+1} n)$

ESEMPI

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$a = 9$, $b = 3$, $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$f(n) = n = O\left(n^{\log_3 9 - \varepsilon}\right)$ $(\forall \varepsilon \leq 1)$ $\xRightarrow{\text{CASO 1}}$ $T(n) = \Theta(n^2)$

- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

$a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$

$f(n) = 1 = \Theta(n^0)$ $\xRightarrow{\text{CASO 2}}$ $T(n) = \Theta(\lg n)$

- $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$

$a=3$, $b=4$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$

$f(n) = n \lg n = \Omega\left(n^{\log_4 3 + \varepsilon}\right) \quad \left(\forall \; \varepsilon \leq 1 - \log_4 3\right)$

INOLTRE: $a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3 \cdot \frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \lg n \quad \left(c = \frac{3}{4}\right)$

$\overset{\text{CASO 3}}{\Longrightarrow} \quad T(n) = \Theta(n \lg n)$

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$

$a=2$, $b=2$, $n^{\log_2 2} = n^1$

$f(n) = n \lg n = \Theta(n \cdot \lg n) \overset{\text{CASO 2'}}{\Longrightarrow} T(n) = \Theta(n \lg^2 n)$

# ESERCIZIO

RISOLVERE LE SEGUENTI RICORRENZE:

- $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$

**a.** $T(n) = 2T(n/4) + 1.$

**b.** $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}.$

**c.** $T(n) = 2T(n/4) + n.$

**d.** $T(n) = 2T(n/4) + n^2.$

e. $T(n) = 2T(n/4) + n^3.$

**COROLLARIO**: SIANO $a \geq 1$, $b > 1$, $k \geq 0$, $h \geq 0$ COSTANTI,

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + n^k (\lg n)^h$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\log_b a}\right) & \text{SE } \log_b a > k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right) & \text{SE } \log_b a = k \\ \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right) & \text{SE } 0 \leq \log_b a < k \end{cases}$$

**DIM.** - SE $\log_b a > k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$, E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$,

- SE $\log_b a = k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot (\lg n)^h\right)$ E QUINDI $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^{h+1}\right)$.

%.

- INFINE, SE $0 \leq \log_b a < k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ PER QUALCHE $\varepsilon > 0$.

INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI REGOLARITA', INFATTI:

$$a\left(\frac{n}{b}\right)^k \left(\lg \frac{n}{b}\right)^h = \frac{a}{b^k} n^k (\lg n - \lg b)^h$$

$$< \frac{a}{b^k} n^k \cdot (\lg n)^h$$

$$\leq c\, n^k (\lg n)^h$$

(PER OGNI COSTANTE $c$ TALE CHE $\frac{a}{b^k} \leq c < 1$; TALI COSTANTI ESISTONO DATO CHE $\log_b a < k \rightarrow a < b^k \rightarrow \frac{a}{b^k} < 1$ )

PERTANTO IN QUESTO CASO SI HA $T(n) = \Theta\left(n^k (\lg n)^h\right)$. ■

# ESERCIZIO

Si enuncino il Teorema Master ed il suo Corollorio, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro $\alpha \geq 1$:

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n \,. \qquad (*)$$

Per quali valori di $\alpha$ si ha: (a) $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$; (b) $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$; (c) $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$ ?

- PER COMINCIARE, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI RICORRENZA PARAMETRICA $(*)$.

- APPLICANDO DIRETTAMENTE IL COROLLARIO, SI HA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\lg \alpha}\right) & \text{SE } \lg \alpha > 2 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^3\right) & \text{SE } \lg \alpha = 2 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^2\right) & \text{SE } 0 \leq \lg \alpha < 2 \end{cases}$$

POICHE'

$$\lg \alpha > 2 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha > 4$$

$$\lg \alpha = 2 \quad \longleftrightarrow \quad \alpha = 4$$

$$0 \leq \lg \alpha < 2 \quad \longleftrightarrow \quad 1 \leq \alpha < 4$$

LA SOLUZIONE TROVATA PUÒ ESSERE RISCRITTA COSÌ:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta\left(n^{\lg \alpha}\right) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^3\right) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta\left(n^2 (\lg n)^2\right) & \text{SE } 1 \leq \alpha < 4 \end{cases}$$

RISPONDIAMO ADESSO AI QUESITI (a), (b) E (c)

(a) Per quali valori di $\alpha$ si ha: $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$ ?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \mathcal{O}(n^3) \longleftrightarrow \lg \alpha \leq 3 \longleftrightarrow \alpha \leq 8$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{4 < \alpha \leq 8}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \mathcal{O}(n^3)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 = \mathcal{O}(n^3) \Rightarrow$ PER $\boxed{1 \leq \alpha < 4}$ SI HA $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{1 \leq \alpha \leq 8}$

(b) Per quali valori di $\alpha$ si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$ ?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^3 n) \longleftrightarrow \lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^3 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^3 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{\alpha \geq 4}$

(c) Per quali valori di $\alpha$ si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$ ?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \lg^4 n) \longleftrightarrow \lg \alpha > 2 \longleftrightarrow \alpha > 4$

$\Rightarrow$ PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 \neq \Omega(n^2 \lg^4 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{\alpha > 4}$ ■

# METODO DI AKRA-BAZZI (CASO PARTICOLARE)

SIA $T(n) = g(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$ , PER $n \geq n_0$ ,

DOVE

- $a_i > 0$ , $0 < b_i < 1$ COSTANTI ( $i = 1, 2, \dots, k$ )
- $|g(n)| = \Theta(n^c)$
- $|h_i(n)| = O(n/(\lg n)^2)$ ( $i = 1, 2, \dots, k$ )

SIA INOLTRE $p$ TALE CHE $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$ .

ALLORA :

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^p) & \text{SE } c < p \\ \Theta(n^p \lg n) & \text{SE } c = p \\ \Theta(n^c) & \text{SE } c > p \end{cases}$$

# ESEMPI

- $T(n) = n^2 + \frac{7}{4} T\left(\left\lfloor \frac{1}{2} n \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{3}{4} n \right\rceil\right) \quad (n \geq 3)$

$\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ HA SOLUZIONE $x = 2$

DUNQUE: $p = 2$, $c = 2 \longrightarrow T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$

- $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 2\right) + \Theta(n)$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1 \qquad x = 1 \longrightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

QUINDI LA SOLUZIONE $p$ DI $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$ E' $< 1$.

PERTANTO $T(n) = \Theta(n)$.