$n^k \lg^h n$

ESERCIZIO 1 (Foglio A)

(A) Si enuncino il Teorema Master e il suo Corollario, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro $b \geq 1$:

$$T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{2b}\right) + \Theta\left(n^2 \log^2 n\right).$$

Per quali valori di b si ha: (a) $T(n) = \mathcal{O}(n^4)$; (b) $T(n) = \Omega(n^4)$; (c) $T(n) = \Theta(n^4)$; (d) $T(n) = \mathcal{O}(n^2 \log n)$?

(B) Si ordinino per tasso di crescita le funzioni $n^2 \log n$, $n \log^2 n$, $\frac{2^n}{n^4}$, $n^2 \log^n n$, $n \log^4 n$.

$$T(n) = 16\, T\left(\frac{n}{2b}\right) + \Theta(n^2 \lg^2 n)$$

$$\lg_{2b} 16 \gtreqless 2$$

$$(2b)^{\lg_{2b} 16} \gtreqless (2b)^2$$

$$16 \gtreqless 4b^2$$

$$4 \gtreqless b^2$$

$$2 \gtreqless b$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^2 \lg^3 n) & b = 2 \\ \Theta\left(n^{\lg_{2b} 16}\right) & 1 \leq b < 2 \\ \Theta(n^2 \lg^2 n) & b > 2 \end{cases}$$

(a) $b=2 \vee b>2 \vee 1\leq b<2 \longrightarrow \forall b\geq 1$

$n^{\log_{2b}16}$ $\quad n^4$

$\log_{2b}16 \leq 4$

$16 \leq (2b)^4 = 16b^4$

$1 \leq b^4$

$1 \leq b$

$\log_{2b}16 \geq 4$

$16 \geq (2b)^4 = 16b^4$

$1 \geq b^4, \quad 1\geq b \geq 1$

$b=1$

(b) $T(n)=\Omega(n^4) \longrightarrow b=1$

(c) $T(n)=\Theta(n^4) \longrightarrow b=1$

(a) $\log_{2b} 16 \le 2 \rightarrow 16 \le (2b)^2 = 4b^2$, $4 \le b^2$, $\boxed{2 \le b}$

$\boxed{1 \le b < 2}$, MAI

(B) $n \log^2 n$, $n \log^4 n$, $n^2 \log n$, $\dfrac{2^n}{n^4}$, $n^2 \log^n n$

$$\frac{\frac{2^n}{n^4}}{n^2 \log^n n} = \frac{\left(\frac{2}{\log n}\right)^n \leftarrow 0}{n^6 \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

ESERCIZIO 2 (Foglio A)

$\frac{1}{1-\alpha}$ $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$

(a) Si enunci l'ipotesi di *hashing uniforme* e si forniscano dei limiti superiori al numero medio di scansioni in ricerche *con* e *senza* successo in una tabella hash con fattore di carico α, assumendo l'ipotesi di hashing uniforme.

(b) (Facoltativo) Si descriva la procedura per l'inserimento di una chiave in una tabella hash organizzata con l'indirizzamento aperto.

(c) Data la funzione $h(x,i) =_{Def} (x + 3i) \mod 17$, si illustri l'inserimento delle chiavi

$$23,\ 43,\ 48,\ 52,\ 21,\ 5,\ 78,\ 55,\ 35,\ 62,\ 72,\ 17,\ 51,\ 58,\ 46$$

in una tabella hash di dimensione 17, inizialmente vuota e organizzata con l'indirizzamento aperto, utilizzando $h(x,i)$ come funzione hash.

(c) Data la funzione $h(x,i) =_{Def} (x+3i) \mod 17$, si illustri l'inserimento delle chiavi

$\cancel{23}, \cancel{43}, \cancel{48}, \cancel{52}, \cancel{21}, \cancel{5}, \cancel{78}, \cancel{55}, \cancel{35}, \cancel{62}, \cancel{72}, \cancel{17}, \cancel{51}, \cancel{58}, \cancel{46}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	52	58	51	21	5	23	55		43	78	62	46	35	48		72

17
34
51
68

$h(23,0) = 6$

$h(43,0) = 9$

$h(48,0) = 14$

$h(52,0) = 1$

$h(21,0) = 4$

$h(5,0) = 5$

$h(78,0) = 10$

$h(55,0) = 4 \ / \ h(55,1) = 7$

$h(35,0) = 1 \ / \ h(35,1) = 4 \ / \ h(35,2) = 7 \ / \ h(35,3) = 10 \ / \ h(35,4) = 13$

$h(62,0) = 11$

$h(72,0) = 4 \ / \ 7 \ / \ 10 \ / \ 13 \ / \ 16$

$h(17,0) = 0$

$h(51,0) = 0 \ / \ h(51,1) = 3$

$h(58,0) = 7 \ / \ 10 \ / \ 13 \ / \ 16 \ / \ 2$

$h(46,0) = 12$

$\boxed{\text{14 collisioni}}$

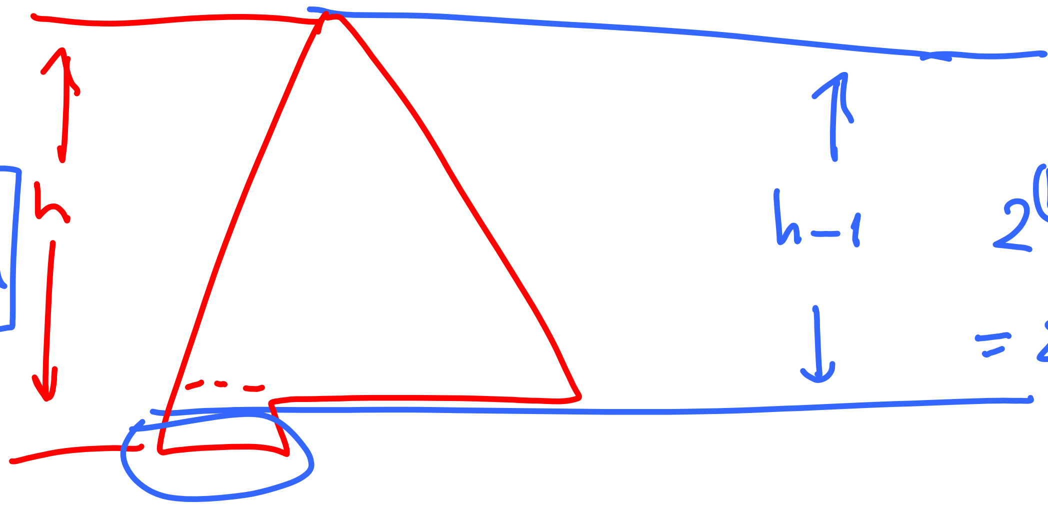
ESERCIZIO 3 (Foglio B)

(a) Si fornisca (con dimostrazione) un limite superiore sull'altezza di un heap binario con n elementi.

(b) Si descriva la procedura BUILD-MAX-HEAP e se ne illustri l'azione sull'array $A = [5, 4, 1, 3, 20, 12, 14, 15, 10, 8]$.

$\boxed{h \text{ altezza}}$

$\boxed{h = 0 \longrightarrow n = 1 \Rightarrow h = \lfloor \lg n \rfloor}$



$2^{(h-1)+1} - 1 = 2^h - 1$

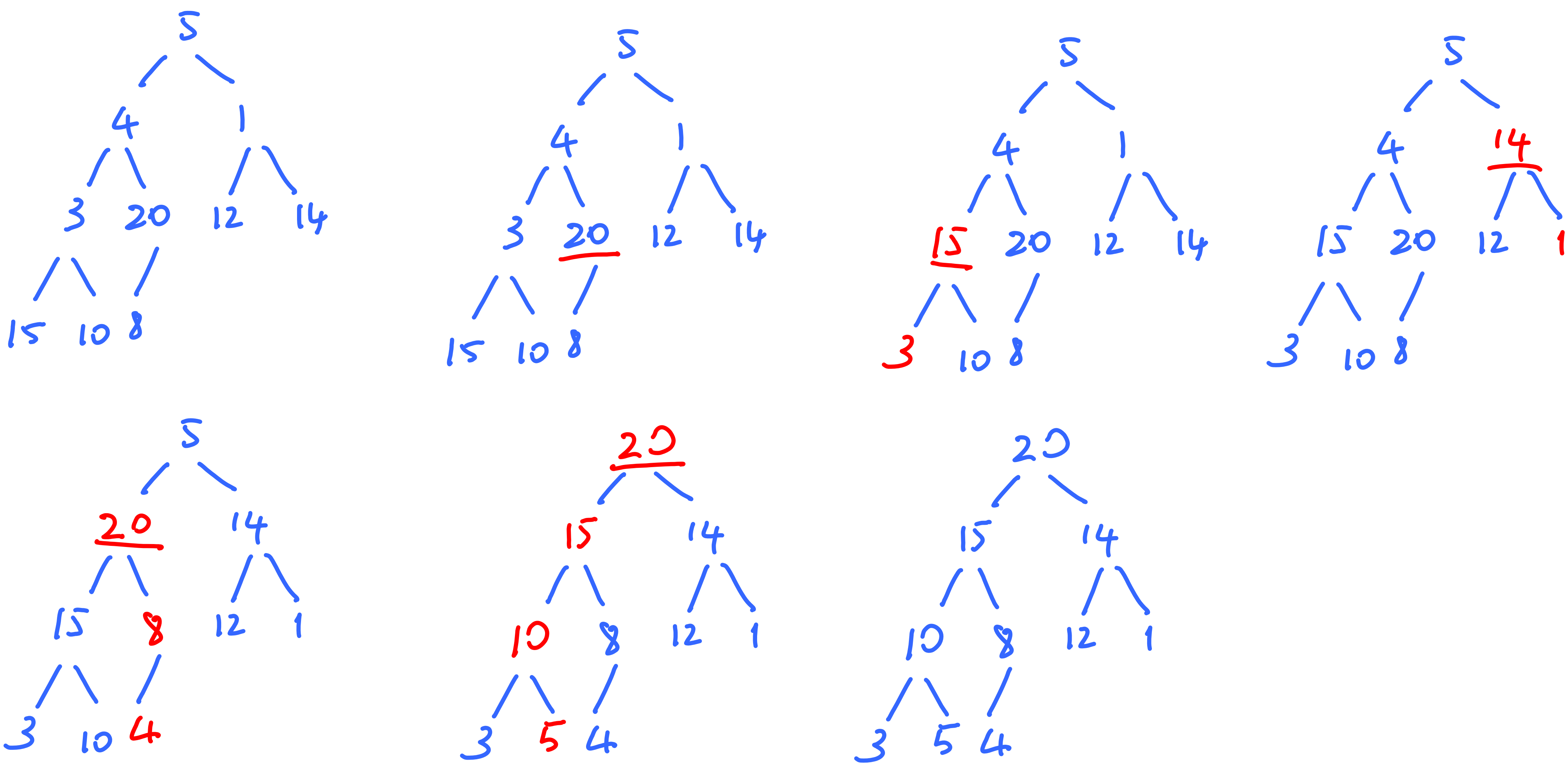
$\boxed{h \geq 1}$

$$2^h - 1 < n \leq 2^{h+1} - 1 < 2^{h+1}$$

$$2^h \leq n < 2^{h+1}$$

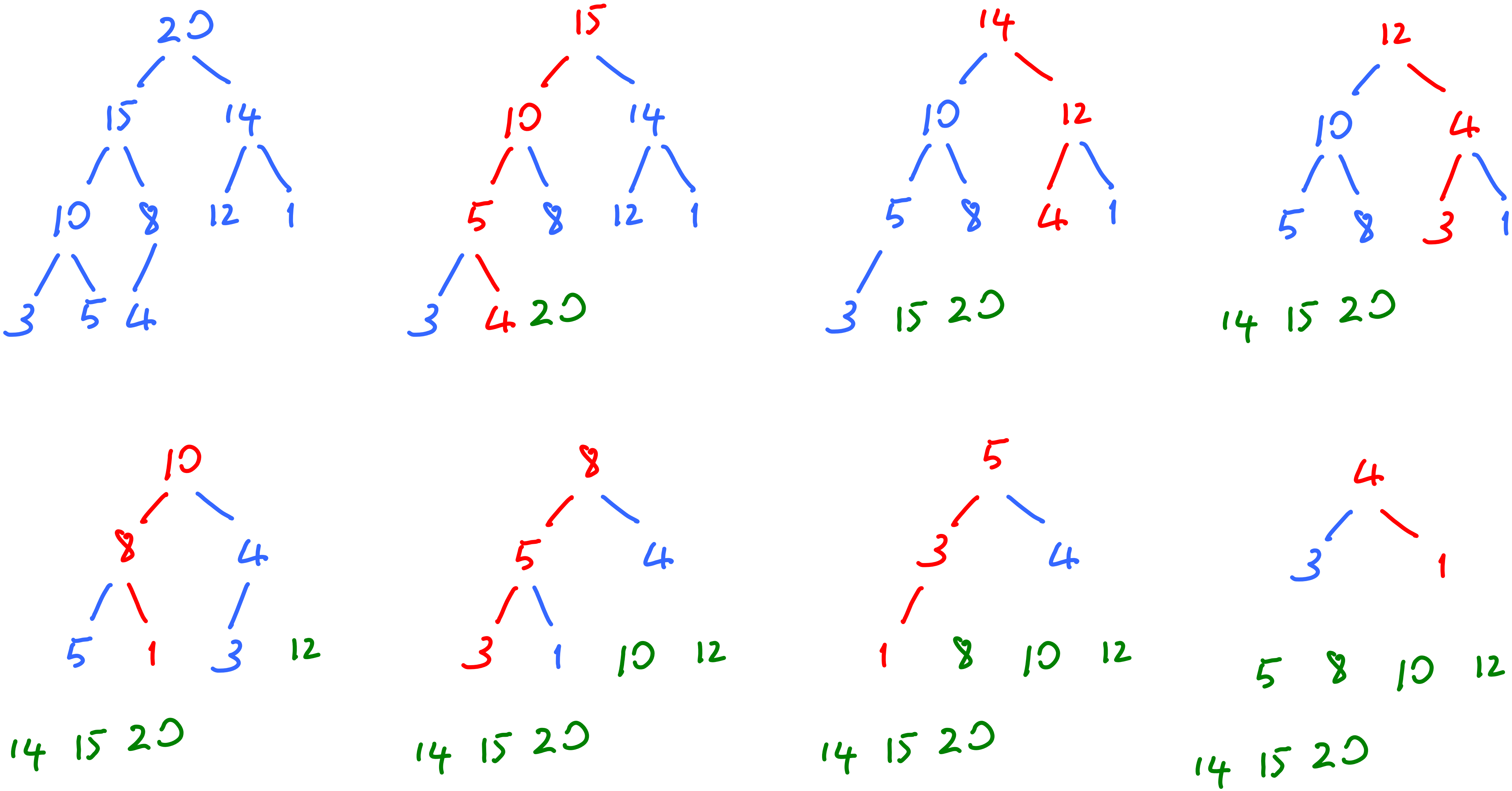
$$\boxed{h \leq \lg n < h+1} \longrightarrow h = \lfloor \lg n \rfloor$$

$$A = [5, 4, 1, 3, 20, 12, 14, 15, 10, 8].$$



$A = [20, 15, 14, 10, 8, 12, 1, 3, 5, 4]$

ESEGUIAMO L'ALGORITMO HEAPSORT



3

1 4

5 8 10 12

14 15 20

1

3 4

5 8 10 12

14 15 20

1	3	4	5	8	10	12	14	15	20

ESERCIZIO 4 **(Foglio B)**

Si descriva l'algoritmo COUNTING SORT (campo di applicazione, pseudocodice, complessità, proprietà, ecc.) e lo si illustri sull'array di coppie $A = [(9, A), (6, B), (0, C), (9, D), (5, E), (7, F), (0, G), (9, H), (5, I)]$, da ordinare rispetto alla prima componente.

$\underbrace{\text{n interi nel range } 0 \,..\, k}$ $\rightarrow$

$\underbrace{O(n+k) = O(\max(n, k))}$

$k = O(n) \rightarrow O(n)$

$$A = [(9,A),(6,B),(0,C),(9,D),(5,E),(7,F),(0,G),(9,H),(5,I)]$$

Range: 0 .. 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C:	2	0	0	0	0	2	1	1	0	3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C:	2	2	2	2	2	4	5	6	6	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C:	0	2	2	2	2	2	4	5	6	6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B:	0	0	5	5	6	7	9	9	9
	C	G	E	I	B	F	A	D	H