PROBLEMA COMPUTAZIONALE: SPECIFICATO DA UNA DATA RELAZIONE TRA INPUT/OUTPUT

ESEMPIO: PROBLEMA DELL'ORDINAMENTO (SORTING)

INPUT: SEQUENZA $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ DI n NUMERI

OUTPUT: PERMUTAZIONE $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ DI $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

TALE CHE $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_n}$

(ORDINAMENTO NON-DECRESCENTE)

- OGNI SPECIFICO INPUT (ES. $(4, 5, 1, 2, 4, 3)$) SI DIRÀ ISTANZA DEL PROBLEMA

ALGORITMO: PROCEDURA COMPUTAZIONALE BEN DEFINITA CHE PRODUCE UNO O PIÙ VALORI (OUTPUT) IN FUNZIONE DI UNO O PIÙ ALTRI VALORI (INPUT) PER RISOLVERE PROBLEMI COMPUTAZIONALI

ALTRI ESEMPI DI PROBLEMI COMPUTAZIONALI:

- PROGETTO HUMAN GENOME
- ACCESSO VELOCE ALL'INFORMAZIONE (WEB, DATABASE)
- COMMERCIO ELETTRONICO (CRITTOGRAFIA, FIRME DIGITALI)
- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE (PRODUZIONE, TRASPORTO)
- ECC.

ALGORITMI COME TECNOLOGIA
(AL PARI DELL' HARDWARE)

- SI CONSIDERINO DUE ALGORITMI a_1 ED a_2 PER UN MEDESIMO PROBLEMA COMPUTAZIONALE (ES. a_1 - INSERTION SORT, a_2 - MERGESORT)
- SUPPONIAMO CHE $T_{a_1}(n) = c_1 n^2$

$$T_{a_2}(n) = c_2 n \lg n$$

- PER VALORI SUFFICIENTEMENTE GRANDI DI n SI HA: $T_{a_2}(n) < T_{a_1}(n)$, DATO CHE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_2 n \lg n}{c_1 n^2} = 0$$

- CONSIDERIAMO DUE COMPUTER A (VELOCE) E B (LENTO)

	VELOCITA'
A	10^9 ISTRUZ/SEC
B	10^7 ISTRUZ/SEC

- SUPPONIAMO DI AVERE DELLE IMPLEMENTAZIONI DI a_1 SU A E DI a_2 SU B TALI CHE

$$T_{a_1}(n) = 2n^2 \quad \text{E} \quad T_{a_2}(n) = 50\, n \lg n$$

- CONFRONTIAMO I TEMPI DI ESECUZIONE DI a_1 SU A E DI a_2 SU B SU UN INPUT DI DIMENSIONE $n = 10^6$

COMPUTER A : $\dfrac{2 \cdot (10^6)^2 \text{ ISTRUZ}}{10^9 \text{ ISTRUZ/SEC}} = 2000 \text{ SEC}$

COMPUTER B : $\dfrac{50 \cdot 10^6 \cdot \lg 10^6 \text{ ISTRUZ}}{10^7 \text{ ISTRUZ/SEC}} \simeq 100 \text{ SEC}$

SEBBENE A SIA 100 VOLTE PIÙ VELOCE DI B, L'ESECUZIONE DI a_1 (DA PARTE DI A) RISULTA 20 VOLTE PIÙ LENTA DI QUELLA DI a_2 (DA PARTE DI B).

1.2-2

Suppose we are comparing implementations of insertion sort and merge sort on the same machine. For inputs of size n, insertion sort runs in $8n^2$ steps, while merge sort runs in $64n \lg n$ steps. For which values of n does insertion sort beat merge sort?

1.2-3

What is the smallest value of n such that an algorithm whose running time is $100n^2$ runs faster than an algorithm whose running time is 2^n on the same machine?

1-1 Comparison of running times

For each function $f(n)$ and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assuming that the algorithm to solve the problem takes $f(n)$ microseconds.

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$							
$\sqrt{n}$							
n							
$n \lg n$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

UN PRIMO CASO DI STUDIO: INSERTION SORT

(CORRETTEZZA E COMPLESSITA')

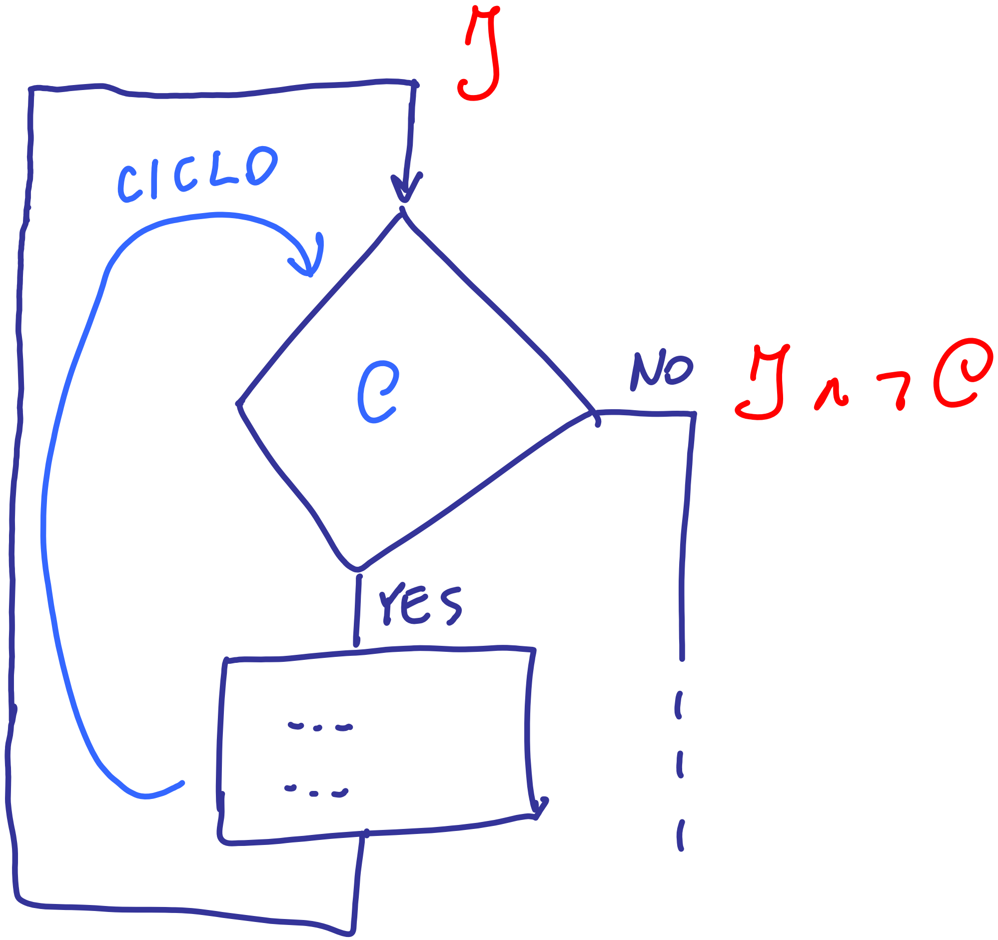
INPUT: UN ARRAY $A[1..n]$ DI INTERI

OUTPUT: UNA PERMUTAZIONE DI A ORDINATA IN SENSO NON-DECRESCENTE

```
INSERTION SORT(A)
  for j := 2 to length[A]
    do key := A[j]
       { INSERISCE A[j] NELLA SEQUENZA ORDINATA A[1..j-1] }
       i := j-1
       while i > 0 and A[i] > key
          do A[i+1] := A[i]
             i := i-1
       A[i+1] := key
```

CORRETTEZZA DI INSERTION SORT

- SI UTILIZZA LA TECNICA DELLE (PROPRIETÀ) INVARIANTI DI CICLO



1. INIZIALIZZAZIONE
   $\mathcal{I}$ E' VERA PRIMA DELLA PRIMA ITERAZIONE

2. MANTENIMENTO
   SE $\mathcal{I}$ E' VERA PRIMA DELLA ESECUZIONE DI UNA ITERAZIONE DEL CICLO, RIMANE VERA PRIMA DELLA SUCCESSIVA ESECUZIONE

3. CONCLUSIONE
   QUANDO IL CICLO TERMINA VALE $\mathcal{I} \wedge \neg C$

CORRETTEZZA DEL CICLO-FOR

- SUPPORREMO CHE IL CICLO-WHILE SIA CORRETTO, CIOE' CHE INSERISCA CORRETTAMENTE L'ELEMENTO $A[j]$ NEL SOTTOARRAY (ORDINATO) $A[1..j-1]$

```
INSERTION SORT(A)
  for j := 2 to length[A]
      do key := A[j]
         i := j-1
         while i > 0 and A[i] > key
             do A[i+1] := A[i]
                i := i-1
         A[i+1] := key
```

$\mathcal{I} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..j-1]$

$\mathcal{C} \equiv$??

NOTA: $A^{(0)}$ INDICA L'ARRAY A NELLE SUE CONDIZIONI INIZIALI

CORRETTEZZA DEL CICLO-FOR

- SUPPORREMO CHE IL CICLO-WHILE SIA CORRETTO, CIOE' CHE INSERISCA CORRETTAMENTE L'ELEMENTO $A[j]$ NEL SOTTOARRAY (ORDINATO) $A[1..j-1]$

INSERTION SORT(A)

for $j := 2$ **to** $length[A]$

$\mathcal{J} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..j-1]$

do $key := A[j]$

$i := j-1$

while $i > 0$ and $A[i] > key$

do $A[i+1] := A[i]$

$i := i-1$

$A[i+1] := key$

$\mathcal{C} \equiv j \leq length[A]$

INIZIALIZZAZIONE ($j=2$)

$\mathcal{I} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..1]$

- BANALMENTE VERO !!

```
INSERTION SORT(A)
  for j := 2 to length[A]
     do key := A[j]
        i := j-1
        while i > 0 and A[i] > key
           do A[i+1] := A[i]
              i := i-1
        A[i+1] := key
```

$\mathcal{I} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..j-1]$

$\mathcal{C} \equiv j \leq length[A]$

MANTENIMENTO ($j \leq length[A]$)

SE IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI DI $A^{(0)}[1..j-1]$, DOPO L'ESECUZIONE DEL CORPO DEL CICLO-FOR $A[j]$ E' INSERITO CORRETTAMENTE IN $A[1..j-1]$ E DUNQUE $A[1..j]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI DI $A^{(0)}[1..j]$

```
INSERTION SORT(A)
  for j := 2 to length[A]

    do key := A[j]
       i := j-1
       while i > 0 and A[i] > key
           do A[i+1] := A[i]
              i := i - 1
       A[i+1] := key
```

$\mathcal{I} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..j-1]$

$$\mathcal{C} \equiv j \leq length[A]$$

CONCLUSIONE $(j > \text{length}[A])$

A CONCLUSIONE DELL'ESECUZIONE DEL CICLO-FOR, VALE $\mathcal{I} \wedge \neg \mathcal{C}$.

DUNQUE $1 \leq j-1 \leq \text{length}[A]$ E $j > \text{length}[A]$, DA CUI $j = \text{length}[A]+1$.

PERTANTO: IL SOTTOARRAY $A[1..\text{length}[A]+1-1] \equiv A$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}$!

```
INSERTION SORT(A)
  for j := 2 to length[A]
      do key := A[j]
         i := j-1
         while i > 0 and A[i] > key
             do A[i+1] := A[i]
                i := i-1
         A[i+1] := key
```

$\mathcal{I} \equiv$ IL SOTTOARRAY $A[1..j-1]$ E' FORMATO DAGLI ELEMENTI ORDINATI IN $A^{(0)}[1..j-1]$

$\mathcal{C} \equiv j \leq \text{length}[A]$

ANALISI DI COMPLESSITÀ DEGLI ALGORITMI

- MISURA DELLE RISORSE RICHIESTE DALL'ESECUZIONE DI UN ALGORITMO, QUALI
  - TEMPO DI ELABORAZIONE
  - MEMORIA
  - LARGHEZZA DI BANDA NELLE COMUNICAZIONI
  - HARDWARE
- FAREMO RIFERIMENTO AL MODELLO DI CALCOLO A UN PROCESSORE RANDOM-ACCESS MACHINE (RAM) IN CUI LE ISTRUZIONI SONO ESEGUITE UNA ALLA VOLTA
- PER UN DATO ALGORITMO, SI CERCA UNA RELAZIONE TRA LA DIMENSIONE DELL'INPUT E IL TEMPO DI ELABORAZIONE.

DIMENSIONE DELL'INPUT

PUO' ESSERE:
- NUMERO DEGLI ELEMENTI DELL'INPUT
- NUMERO DI BIT PER RAPPRESENTARE L'INPUT
- COPPIA DI NUMERI (ES. GRAFI)

TEMPO DI ELABORAZIONE

- NUMERO DI OPERAZIONI PRIMITIVE ESEGUITE
- FAREMO L'IPOTESI CHE OGNI ISTRUZIONE COINVOLGA UN CERTO NUMERO DI OPERAZIONI PRIMITIVE E CHE QUINDI ABBIA COSTO COSTANTE

INSERTION SORT(A)

		COSTO	# ESECUZIONI
1.	**for** $j := 2$ **to** length[A]	c_1	n
2.	**do** $key := A[j]$	c_2	$n-1$
3.	{ INSERISCE $A[j]$ IN $A[1..j-1]$ }	0	$n-1$
4.	$i := j-1$	c_4	$n-1$
5.	**while** $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
6.	**do** $A[i+1] := A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
7.	$i := i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
8.	$A[i+1] := key$	c_8	$n-1$

DOVE $n :=$ length[A] , $t_j :=$ # DI ESECUZIONI DEL TEST DEL CICLO-WHILE 5-7 PER IL VALORE j

$$T(n) = c_1 n + (c_2 + c_4 + c_8)\cdot(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$$

- SI OSSERVI CHE ANCHE PER INPUT DI UNA STESSA DIMENSIONE n, I VALORI t_j DIPENDONO DAL PARTICOLARE INPUT

CASO MIGLIORE (BEST CASE ANALYSIS)

- SI HA QUANDO L'INPUT E' GIA' ORDINATO (IN SENSO NON-DECRESCENTE)
- IN QUESTO CASO $t_j = 1$, PER $j = 2, 3, \ldots, n$, E QUINDI

$$T(n) = (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\,n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

CIOE'

$$T(n) = An + B,$$ CON A E B COSTANTI

- DUNQUE IN QUESTO CASO $T(n)$ E' LINEARE.

CASO PEGGIORE (WORST CASE ANALYSIS)

- SI HA QUANDO L'INPUT E' GIA' ORDINATO IN SENSO DECRESCENTE
- IN QUESTO CASO $t_j = j$, PER $j = 2, 3, \ldots, n$, E QUINDI, FACENDO USO DELL'IDENTITA'

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

SI HA:

$$T(n) = \frac{1}{2}(c_5 + c_6 + c_7)\, n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right) n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$$

CIOE'

$T(n) = An^2 + Bn + C$, CON A, B E C COSTANTI

- IN QUESTO CASO $T(n)$ E' QUADRATICO

- IN GENERALE CI LIMITEREMO A DETERMINARE IL TEMPO DI ESECUZIONE NEL CASO PEGGIORE, IN QUANTO:
  - RAPPRESENTA UN LIMITE SUPERIORE AL TEMPO DI ESECUZIONE PER QUALSIASI INPUT
  - IN MOLTI CASI IL CASO PEGGIORE SI VERIFICA SPESSO
  - IL CASO MEDIO SPESSO E' ALTRETTANTO CATTIVO QUANTO QUELLO PEGGIORE (ES. $t_j \simeq j/2$ IN MEDIA)

  L'ANALISI NEL CASO MEDIO (AVERAGE CASE ANALYSIS) RICHIEDE TECNICHE DI ANALISI PROBALISTICA

IN GENERALE, SAREMO INTERESSATI ALL'ORDINE DI CRESCITA DELLA FUNZIONE TEMPO DI ESECUZIONE.

QUINDI, NON SOLO TRASCUREREMO, NEL CASO DI INSERTION SORT, I VALORI DELLE COSTANTI $c_1, c_2, \ldots, c_8$, MA SEMPLIFICHEREMO ULTERIORMENTE LE ESPRESSIONI $An+B$ E An^2+Bn+C TRASCURANDO I TERMINI DI ORDINE INFERIORE E LA COSTANTE MOLTIPLICATIVA DEI TERMINI DI ORDINE SUPERIORE, E DUNQUE DIREMO CHE LA COMPLESSITÀ DI INSERTION SORT È

$\Theta(n)$, NEL CASO MIGLIORE

$\Theta(n^2)$, NEL CASO PEGGIORE

- INSERTION SORT E' BASATO SULL'APPROCCIO INCREMENTALE: L'INPUT A VIENE INFATTI ORDINATO IN MANIERA INCREMENTALE:

$A[1..2]$, $A[1..3]$, ..., $A[1..n-1]$, $A[1..n]$

- UN APPROCCIO MOLTO IMPORTANTE PER LA PROGETTAZIONE DI ALGORITMI RICORSIVI E' IL DIVIDE ET IMPERA

L'APPROCCIO DIVIDE ET IMPERA

IL PARADIGMA DIVIDE ET IMPERA PREVEDE TRE PASSI A OGNI LIVELLO DI RICORSIONE:

DIVIDE : IL PROBLEMA VIENE SUDDIVISO IN UN CERTO NUMERO DI SOTTOPROBLEMI (DELLA STESSA NATURA)

IMPERA : CIASCUN SOTTOPROBLEMA E' RISOLTO IN MANIERA RICORSIVA (O IN MANIERA DIRETTA, SE SUFFICIENTEMENTE PICCOLO)

COMBINA : LE SOLUZIONI DEI SOTTOPROBLEMI VENGONO COMBINATE PER GENERARE UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ORIGINALE

CASO DI STUDIO: L'ALGORITMO MERGE SORT

DIVIDE: LA SEQUENZA DEGLI n ELEMENTI DA ORDINARE E' DIVISA IN 2 SEQUENZE DI $\frac{n}{2}$ (CIRCA) ELEMENTI

IMPERA: CIASCUNA SOTTOSEQUENZA E' ORDINATA RICORSIVAMENTE

COMBINA: LE DUE SOTTOSEQUENZE ORDINATE SONO FUSE IN UN'UNICA SEQUENZA ORDINATA

```
MERGE-SORT(A, p, r)
  { ORDINA LA SOTTOSEQUENZA A[p..r] }
  if p < r
     then   q := ⌊(p+r)/2⌋
            MERGE-SORT(A, p, q)
            MERGE-SORT(A, q+1, r)
            MERGE(A, p, q, r)
```

MERGE (A, p, q, r)

$\{ p \leq q < r$, $A[p..q]$ E $A[q+1..r]$ SONO ORDINATI $\}$

```
n1 := q - p + 1 ;    n2 := r - q
CREA  L[1..n1+1]  E  R[1..n2+1]
for i := 1 to n1
    do L[i] := A[p+i-1]            ] COPIA A[p..q] IN L[1..n1]
for j := 1 to n2
    do R[j] := A[q+j]              ] COPIA A[q+1..r] IN R[1..n2]
L[n1+1] := +∞ ; R[n2+1] := +∞     ] SENTINELLE
i := 1 ;  j := 1
for k := p to r
    do if L[i] ≤ R[j]
       then A[k] := L[i]
            i := i+1
       else A[k] := R[j]
            j := j+1
```

COMPLESSITA' $\Theta(n)$, CON $n = r - p + 1$

ANALISI DEGLI ALGORITMI DIVIDE ET IMPERA

$T(n)$ - TEMPO DI ESECUZIONE SU INPUT DI DIMENSIONE n

a - NUMERO DI SOTTOPROBLEMI

$\frac{n}{b}$ - DIMENSIONE DI CIASCUN SOTTOPROBLEMA

s - SOGLIA AL DI SOTTO DELLA QUALE NON C'E' RICORSIONE

$D(n)$ - TEMPO PER DIVIDERE IL PROBLEMA IN SOTTOPROBLEMI

$C(n)$ - TEMPO PER COMBINARE LE SOLUZIONI DEI SOTTOPROBLEMI NELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ORIGINALE

SI OTTIENE LA SEGUENTE RICORRENZA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n \leq s \\ a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + D(n) + C(n) & \text{SE } n > s \end{cases}$$

NEL CASO DI MERGE SORT SI HA:

$a = 2$

$b = 2$

$D(n) = \Theta(1)$

$C(n) = \Theta(n)$ (COMPLESSITÀ DI MERGE)

E QUINDI $T(n)$ SODDISFA LA SEGUENTE RICORRENZA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & \text{SE } n > 1 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONE

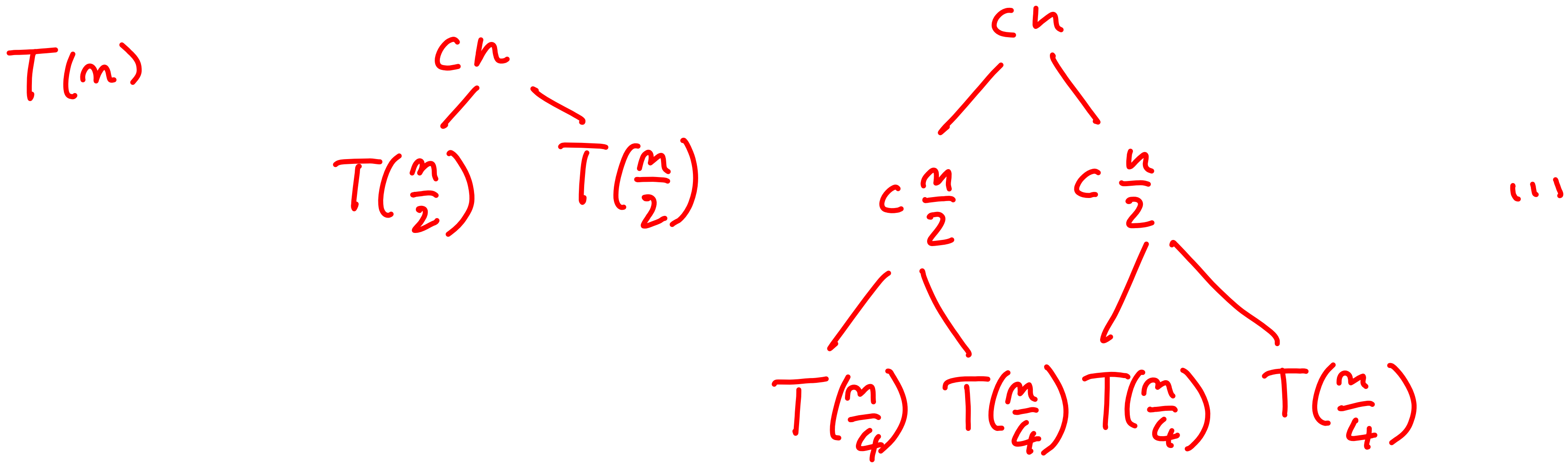
$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

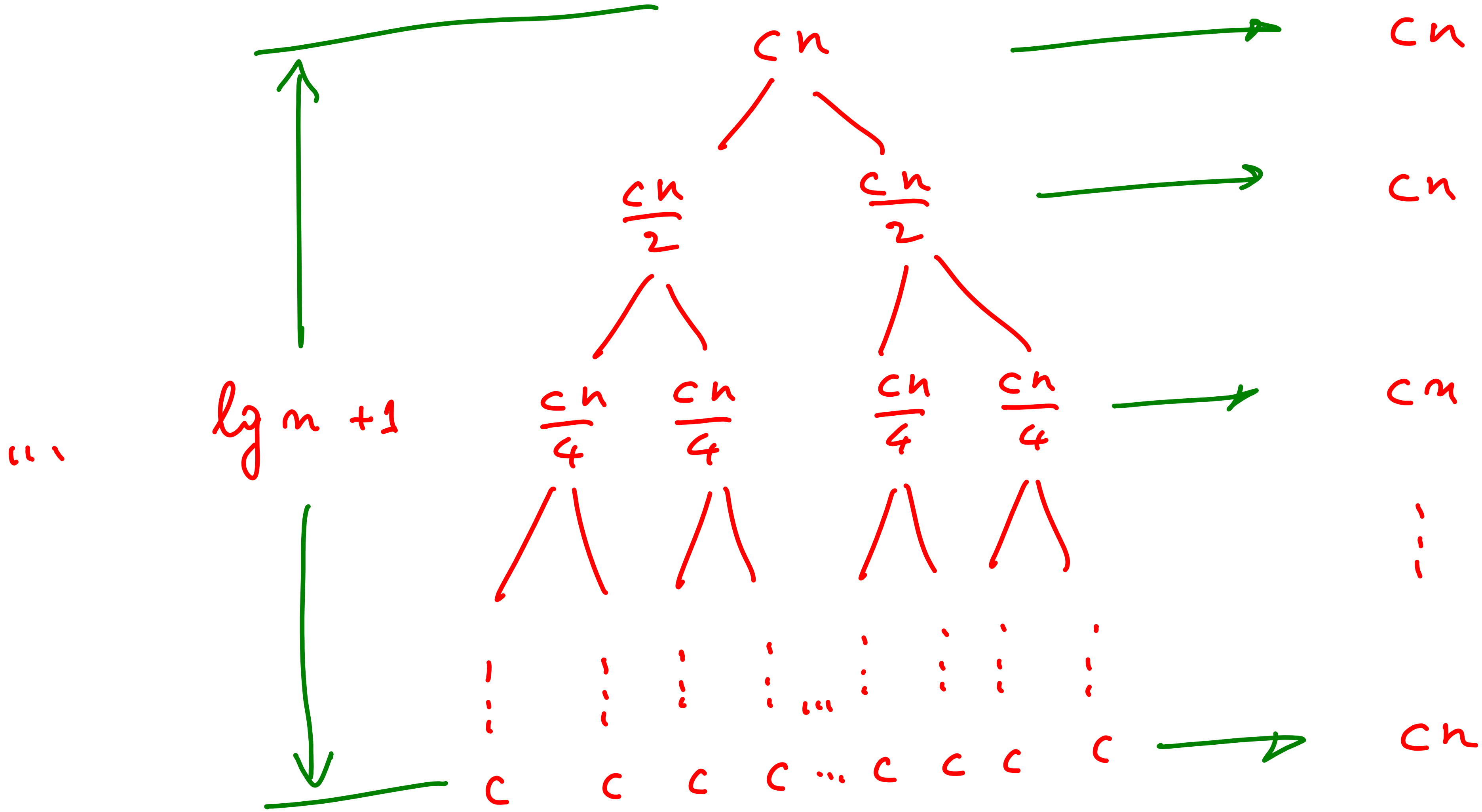
STUDIEREMO UN METODO GENERALE PER RISOLVERE RICORRENZE DI QUESTO TIPO

RISCRIVIAMO LA RICORRENZA NELLA FORMA

$$T(n) = \begin{cases} c & \text{SE} \quad n = 1 \\ 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{SE} \quad n > 1 \end{cases}$$

E LA RISOLVIAMO COSTRUENDONE L'ALBERO DI RICORSIONE





TOTALE: $cn \lg n + cn$

PERTANTO: $T(n) = \Theta(n \lg n)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

$$= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + c\frac{n}{2}\right) + cn = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2cn$$

$$= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + c\frac{n}{2^2}\right) + 2cn = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3cn$$

$$\vdots$$

$$= 2^h T\left(\frac{n}{2^h}\right) + hcn$$

$$\vdots$$

$$= 2^{\lg n} T(1) + cn \lg n$$

$$= cn + cn \lg n$$