

RICORRENZE

- EQUAZIONI O DISEQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL VALORE DI UNA FUNZIONE IN TERMINI DEL SUO VALORE CON INPUT PIÙ PICCOLI

ES.
$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{SE } n=1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{SE } n>1 \end{cases}$$

CON SOLUZIONE

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

- CONSIDEREREMO I SEGUENTI TRE METODI

- METODO DI SOSTITUZIONE
- METODO ITERATIVO O DELL'ALBERO DI RICORSIONE
- METODO "MASTER" PER RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \text{ CON } a \geq 1, b > 1$$

METODO DI SOSTITUZIONE

1. INDOVINARE UNA POSSIBILE SOLUZIONE
2. VERIFICARE LA SOLUZIONE PER INDUZIONE

ES. DETERMINARE UN LIMITE SUPERIORE PER $T(n)$, OVE

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$

VERIFICHIAMO CHE $T(n) = O(n \lg n)$, CIOE'

$$T(n) \leq c n \lg n \quad \text{PER QUALCHE } c > 0 \text{ E PER } n \text{ SUFFICIENTEMENTE GRANDE}$$

SUPPONIAMO CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor)$

$$\begin{aligned} \text{ALLORA: } T(n) &\leq 2c \lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq cn \lg\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= cn \lg n - cn \lg 2 + n \\ &= cn \lg n - cn + n \\ &\leq cn \lg n \end{aligned}$$

PER $n \geq 2$, $c \geq \max\left(\frac{T(2)}{2}, \frac{T(3)}{3 \lg 3}, 1\right)$

RAFFORZAMENTO DELL'IPOTESI INDUTTIVA

SI DIMOSTRI CHE LA RICORRENZA

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

HA SOLUZIONE $T(n) = O(n)$,

OCCORRE VERIFICARE CHE $T(n) \leq cn$, PER QUALCHE $c > 0$, $\forall n \geq n_0$.
SUPPONIAMO INDUTTIVAMENTE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$, $T(\lceil n/2 \rceil) \leq c \lceil n/2 \rceil$.
ALLORA: $T(n) \leq c \lfloor n/2 \rfloor + c \lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \leq cn!$

RAFFORZIAMO L'IPOTESI INDUTTIVA: $T(n) \leq cn - b$, CON $b \geq 0$.

SI HA:

$$T(n) \leq (c \lfloor n/2 \rfloor - b) + (c \lceil n/2 \rceil - b) + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$$

PER $b \geq 1$, $c \geq T(1) + b$, $n \geq 1$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI!

DATA $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, CERCHIAMO DI DIMOSTRARE
CHE $T(n) = O(n)$ (FALSO!)

SUPPONIAMO PER INDUZIONE CHE $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c \lfloor n/2 \rfloor$.

ALLORA

$$T(n) \leq 2c \lfloor n/2 \rfloor + n \leq cn + n = (c+1)n = O(n)$$

↑
ERRORE!

OCCORREREBBE INFATTI DIMOSTRARE CHE $T(n) \leq cn$,
CON LA MEDESIMA COSTANTE c .

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$T(n) = 2 T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$$

PONIAMO $m = \lg n$, DA CUI $n = 2^m$, E SOSTITUIAMO:

$$T(2^m) = 2 T(2^{m/2}) + m$$

PONIAMO $S(m) = T(2^m)$.

$$\Rightarrow S(m) = 2 S\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

QUINDI: $S(m) = \Theta(m \lg m)$, DA CUI

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = \Theta(m \lg m) = \Theta(\lg n \cdot \lg \lg n).$$

ESERCIZI

- RISOLVERE LE SEGUENTI EQUAZIONI DI RICORRENZA:

- $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$
- $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + O(1)$

METODO ITERATIVO

- CONSISTE NELL'ESPANDERE LA RICORRENZA FINO AD ESPRIMERE LA FUNZIONE IN TERMINI DI n E DELLE CONDIZIONI INIZIALI

ES. $T(n) = 3 T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

$$T(n) = n + 3 T(\lfloor n/4 \rfloor)$$

$$= n + 3 (\lfloor n/4 \rfloor + 3 T(\lfloor n/4^2 \rfloor))$$

$$= n + 3 (\lfloor n/4 \rfloor + 3 (\lfloor n/4^2 \rfloor + 3 T(\lfloor n/4^3 \rfloor)))$$

$$= n + 3 \lfloor n/4 \rfloor + 3^2 \lfloor n/4^2 \rfloor + 3^3 T(\lfloor n/4^3 \rfloor)$$

$$\leq n + \frac{3}{4}n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + \dots + 3^{\log_4 n} \textcircled{4} (1)$$

$$\leq n \sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i + \textcircled{4} (n^{\log_4 3})$$

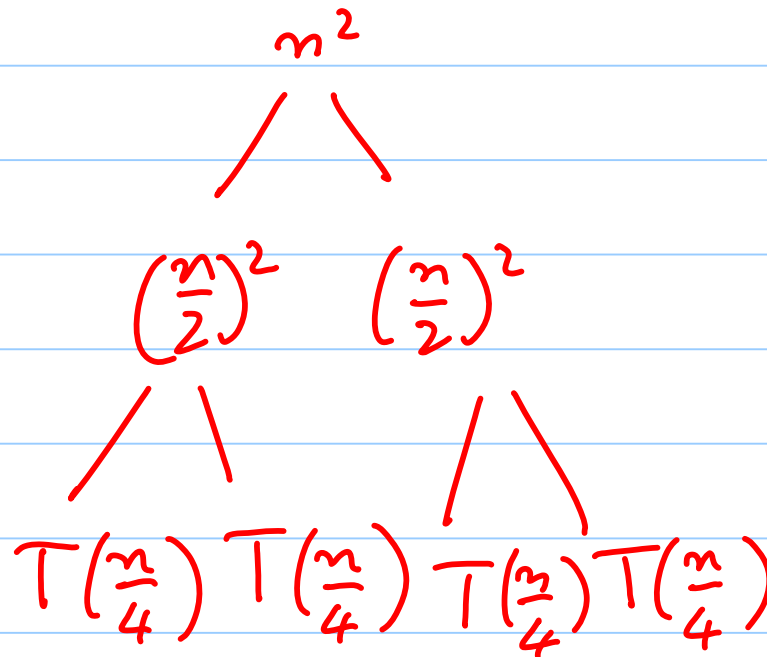
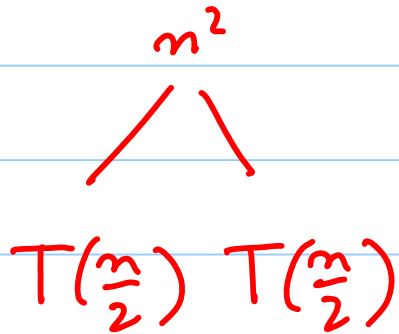
$$= 4n + \textcircled{4} (n^{\log_4 3}) = O(n)$$

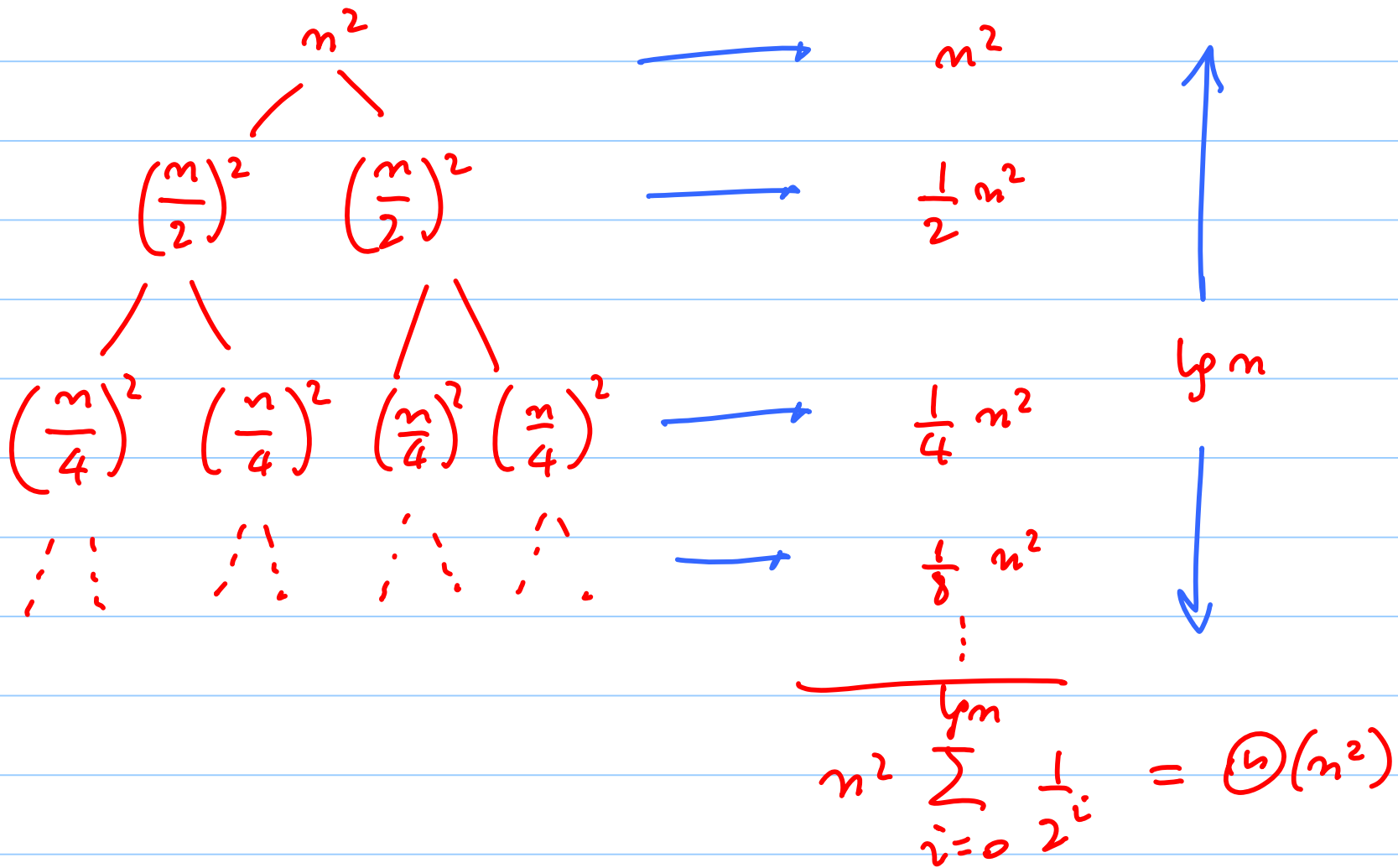
ALBERI DI RICORSIONE

- SONO PARTICOLARMENTE UTILI NELL'APPLICAZIONE DEL METODO ITERATIVO

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$T(n)$

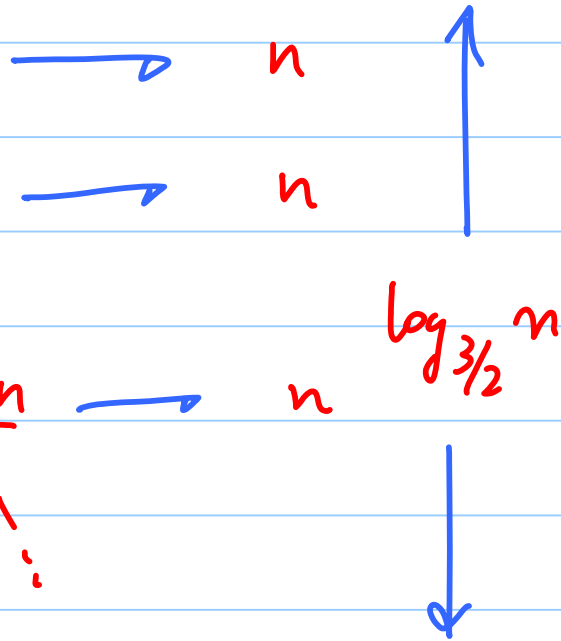
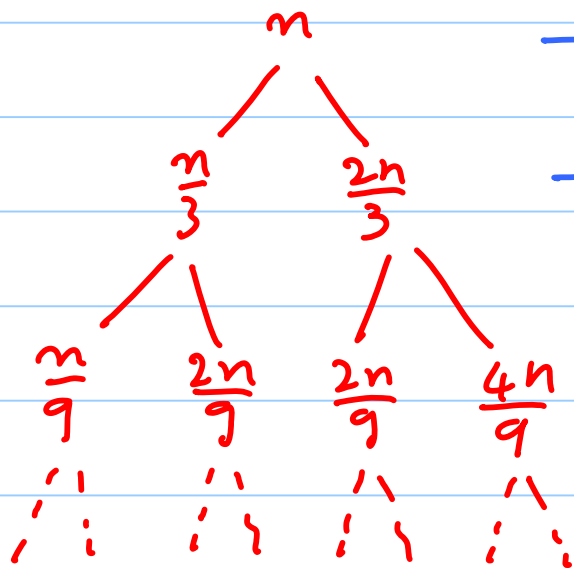
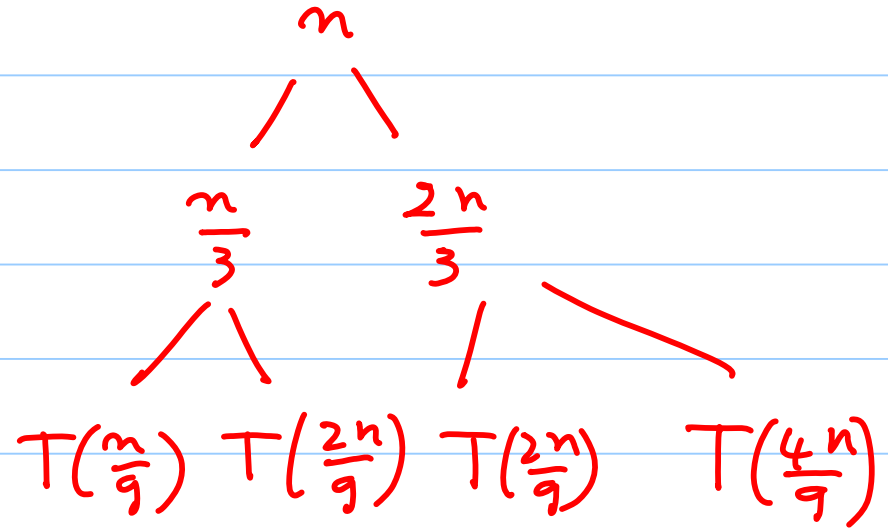
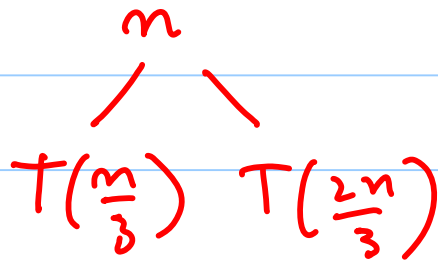




Es.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

$T(n)$



$$n \log_{3/2} n = \Theta(n \log n)$$

ESERCIZI

4.3-1

Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.

- RISOLVERE L'EQUAZIONE $T(n) = T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$

RICORRENZE DELLA FORMA

$$T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

TEOREMA: SIANO $a \geq 1$, $b > 1$ COSTANTI E SIA $f(n)$ UNA FUNZIONE ASSEGNATA.

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$,

1. SE $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ PER QUALCHE $\epsilon > 0$,

ALLORA $T(n) = O(n^{\log_b a})$

2. SE $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, ALLORA $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$

3. SE $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ PER QUALCHE $\epsilon > 0$

E SE $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ PER QUALCHE $c < 1$ E PER VALORI DI n SUFFICIENTEMENTE GRANDI,

ALLORA $T(n) = \Theta(f(n))$

GENERALIZZAZIONE

IL CASO 2 PUO' ESSERE GENERALIZZATO:

2'. SE $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^k n)$, CON $k \geq 0$,

ALLORA $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg^{k+1} n)$

ESEMPI

$$- T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 9, b = 3, n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$$

$$f(n) = n = \mathcal{O}(n^{\log_3 9 - \varepsilon}) \quad (\forall \varepsilon \leq 1) \xRightarrow{\text{CASO 1}} T(n) = \mathcal{O}(n^2)$$

$$- T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$$

$$f(n) = 1 = \mathcal{O}(n^0) \xRightarrow{\text{CASO 2}} T(n) = \mathcal{O}(\lg n)$$

$$- T(n) = 3 T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$$

$$a=3, b=4, n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$$

$$f(n) = n \lg n = \Omega\left(n^{\log_4 3 + \varepsilon}\right) \quad (\forall \varepsilon \leq 1 - \log_4 3)$$

$$\text{INOLTRE: } a f\left(\frac{n}{b}\right) = 3 \cdot \frac{n}{4} \lg \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \lg n \quad \left(c = \frac{3}{4}\right)$$

CASO 3
 \Rightarrow

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$

$$- T(n) = 2 T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$$

$$a=2, b=2, n^{\log_2 2} = n^1$$

$$f(n) = n \lg n = \Theta(n \cdot \lg n) \quad \text{CASO 2'} \Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg^2 n)$$

ESERCIZIO

RISOLVERE LE SEGUENTI RICORRENZE:

$$- T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

$$- T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

a. $T(n) = 2T(n/4) + 1.$

b. $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}.$

c. $T(n) = 2T(n/4) + n.$

d. $T(n) = 2T(n/4) + n^2.$

e. $T(n) = 2T(n/4) + n^3.$

COROLLARIO: SIANO $a \geq 1$, $b > 1$, $k \geq 0$, $h \geq 0$ COSTANTI.

SIA INOLTRE $T(n)$ TALE CHE $T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + n^k (\lg n)^h$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{SE } \log_b a > k \\ \Theta(n^k (\lg n)^{h+1}) & \text{SE } \log_b a = k \\ \Theta(n^k (\lg n)^h) & \text{SE } 0 \leq \log_b a < k \end{cases}$$

DIM. - SE $\log_b a > k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ PER
QUALCHE $\varepsilon > 0$, E QUINDI $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

- SE $\log_b a = k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Theta(n^{\log_b a} \cdot (\lg n)^h)$
E QUINDI $T(n) = \Theta(n^k (\lg n)^{h+1})$. %

- INFINE, SE $0 \leq \log_b a < k$, ALLORA $n^k (\lg n)^h = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$
PER QUALCHE $\varepsilon > 0$,

INOLTRE VALE LA CONDIZIONE DI REGOLARITA', INFATTI:

$$\begin{aligned} a \left(\frac{n}{b}\right)^k (\lg \frac{n}{b})^h &= \frac{a}{b^k} n^k (\lg n - \lg b)^h \\ &< \frac{a}{b^k} n^k \cdot (\lg n)^h \\ &\leq c n^k (\lg n)^h \end{aligned}$$

(PER OGNI COSTANTE c
TALE CHE $\frac{a}{b^k} \leq c < 1$;
TALI COSTANTI ESISTONO
DATO CHE
 $\log_b a < k \rightarrow a < b^k$
 $\rightarrow \frac{a}{b^k} < 1$)

PERTANTO IN QUESTO CASO SI HA $T(n) = \Theta(n^k (\lg n)^h)$. ■

ESERCIZIO

Si enunciino il Teorema Master ed il suo Corollario, quindi si risolva la seguente equazione di ricorrenza al variare del parametro $\alpha \geq 1$:

$$T(n) = \alpha \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \log^2 n. \quad (*)$$

Per quali valori di α si ha: (a) $T(n) = \mathcal{O}(n^3)$; (b) $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$; (c) $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

- PER COMINCIARE, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DI RICORRENZA PARAMETRICA (*).

- APPLICANDO DIRETTAMENTE IL COROLLARIO, SI HA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \lg \alpha > 2 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \lg \alpha = 2 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 0 \leq \lg \alpha < 2 \end{cases}$$

POICHE'

$$\lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$$

$$\lg \alpha = 2 \iff \alpha = 4$$

$$0 \leq \lg \alpha < 2 \iff 1 \leq \alpha < 4$$

LA SOLUZIONE TROVATA PUÒ ESSERE RISCRISSA COSÌ:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\lg \alpha}) & \text{SE } \alpha > 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^3) & \text{SE } \alpha = 4 \\ \Theta(n^2 (\lg n)^2) & \text{SE } 1 \leq \alpha < 4 \end{cases}$$

RISPONDIAMO ADESSO AI QUESITI (a), (b) E (c)

(a) Per quali valori di α si ha: $T(n) = O(n^3)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{4\alpha} = O(n^3) \iff \lg \alpha \leq 3 \iff \alpha \leq 8$

\Rightarrow PER $\boxed{4 < \alpha \leq 8}$ SI HA $T(n) = O(n^3)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^3 = O(n^3)$

\Rightarrow PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = O(n^3)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\lg n)^2 = O(n^3) \Rightarrow$ PER $\boxed{1 \leq \alpha < 4}$ SI HA $T(n) = O(n^3)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E': $\boxed{1 \leq \alpha \leq 8}$

(b) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\lg \alpha} = \Omega(n^2 \log^3 n) \iff \lg \alpha > 2 \iff \alpha > 4$

\Rightarrow PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\log n)^3 = \Omega(n^2 \log^3 n)$

\Rightarrow PER $\boxed{\alpha = 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \log^3 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\log n)^2 \neq \Omega(n^2 \log^3 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E' :

$\boxed{\alpha \geq 4}$

(c) Per quali valori di α si ha: $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$?

CASO $\alpha > 4$

SI HA $n^{\log \alpha} = \Omega(n^2 \log^4 n) \iff \log \alpha > 2 \iff \alpha > 4$

\Rightarrow PER $\boxed{\alpha > 4}$ SI HA $T(n) = \Omega(n^2 \log^4 n)$

CASO $\alpha = 4$

SI HA $n^2 (\log n)^3 \neq \Omega(n^2 \log^4 n)$

CASO $1 \leq \alpha < 4$

SI HA $n^2 (\log n)^2 \neq \Omega(n^2 \log^4 n)$

PERTANTO LA SOLUZIONE E' :

$\boxed{\alpha > 4}$

METODO DI AKRA-BAZZI (CASO PARTICOLARE)

SIA $T(n) = g(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n))$, PER $n \geq n_0$,

DOVE

- $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$ COSTANTI ($i = 1, 2, \dots, k$)
- $|g(n)| = \Theta(n^c)$
- $|h_i(n)| = O(n / (\lg n)^2)$ ($i = 1, 2, \dots, k$)

SIA INOLTRE p TALE CHE $\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$.

ALLORA:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^p) & \text{SE } c < p \\ \Theta(n^p \lg n) & \text{SE } c = p \\ \Theta(n^c) & \text{SE } c > p \end{cases}$$

ESEMPLI

$$- T(n) = n^2 + \frac{7}{4} T(\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor) + T(\lceil \frac{3}{4} n \rceil) \quad (n \geq 3)$$

$$\frac{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1 \quad \text{HA SOLUZIONE} \quad x=2$$

$$\text{DUNQUE:} \quad p=2, c=2 \rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \lg n)$$

$$- T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + T\left(\frac{7n}{10} + 2\right) + \Theta(n)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$$

$$x=1 \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{10} = \frac{2+7}{10} = \frac{9}{10} < 1$$

QUINDI LA SOLUZIONE p DI $\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{7}{10}\right)^x = 1$ È < 1 .

PERTANTO $T(n) = \Theta(n)$.