

NOTAZIONI ASINTOTICHE

- USEREMO LE SEGUENTI NOTAZIONI ASINTOTICHE PER CARATTERIZZARE IL TASSO DI CRESCITA DEL TEMPO DI ESECUZIONE DI UN DATO ALGORITMO

- SIA $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, OVE $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTONO } c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALI CHE}$
 $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTE } c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE}$
 $0 \leq f(n) \leq c g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ESISTE } c > 0, n_0 \in \mathbb{N} \text{ TALE CHE}$
 $0 \leq c g(n) \leq f(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0\}$

- SCRIVIAMO $f(n) = \Theta(g(n))$, $f(n) = O(g(n))$, $f(n) = \Omega(g(n))$

PER INTENDERE, RISPETTIVAMENTE,

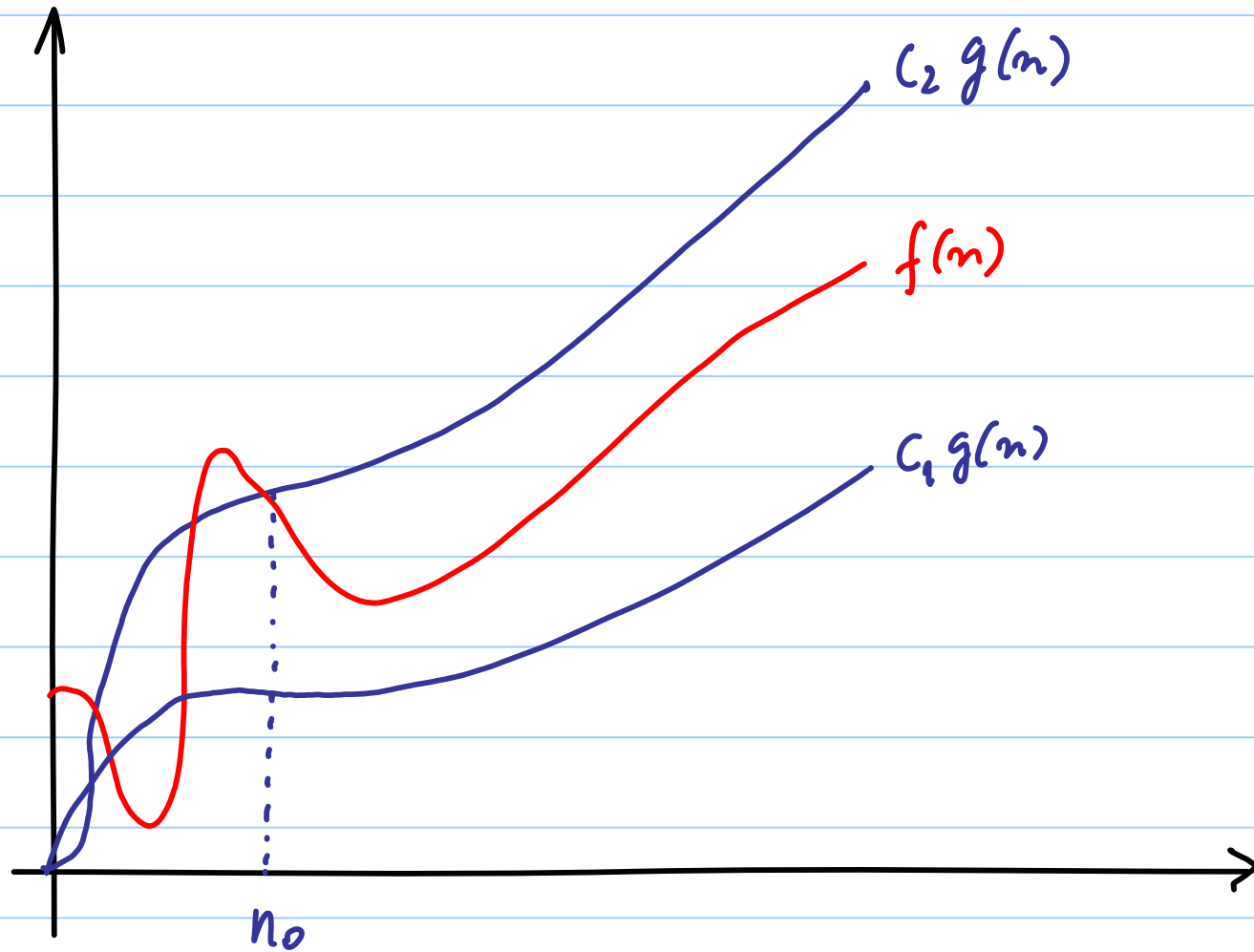
$$f(n) \in \Theta(g(n)), \quad f(n) \in O(g(n)), \quad f(n) \in \Omega(g(n))$$

- SE $f(n) = \Theta(g(n))$, ALLORA $g(n)$ È UN LIMITE
ASINTOTICAMENTE STRETTO PER $f(n)$

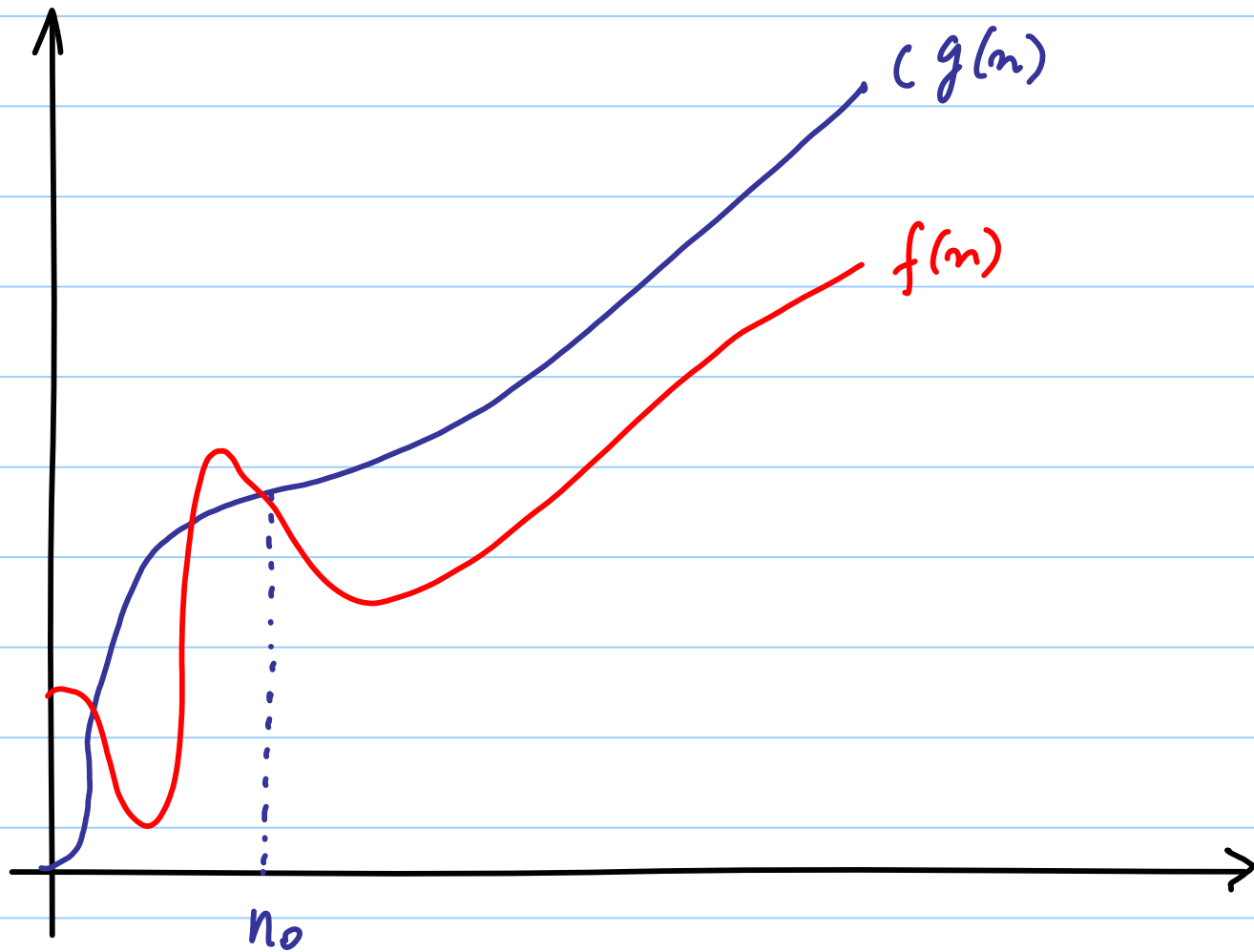
- SE $f(n) = O(g(n))$, ALLORA $g(n)$ È UN LIMITE
ASINTOTICO SUPERIORE PER $f(n)$

- SE $f(n) = \Omega(g(n))$, ALLORA $g(n)$ È UN LIMITE
ASINTOTICO INFERIORE PER $f(n)$

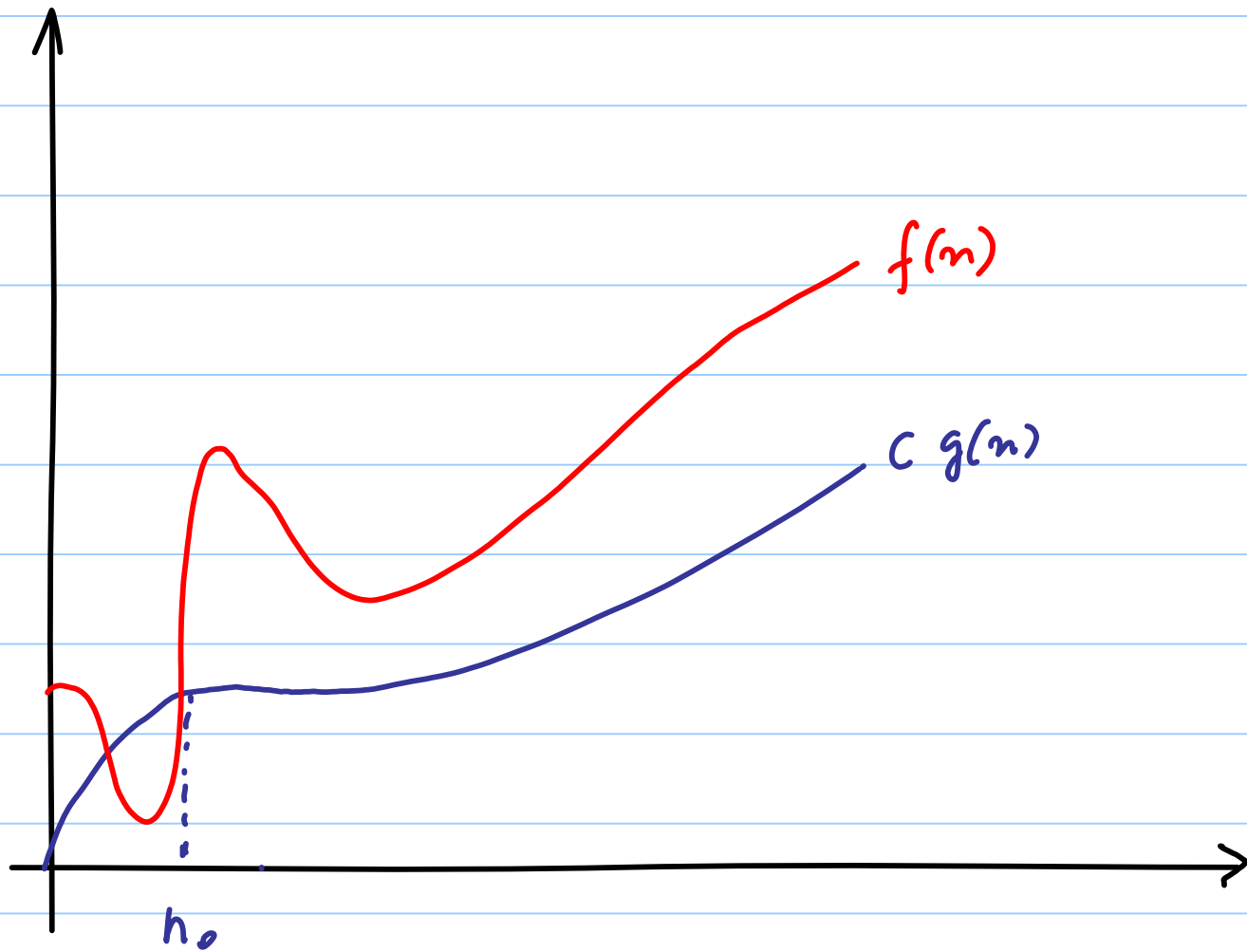
RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE



$$f(n) = \textcircled{h} (g(n))$$



$$f(n) = O(g(n))$$



$$f(n) = \Omega(g(n))$$

ES. $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

OCCORRE DETERMINARE $c_1, c_2 > 0$ ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2, \text{ PER OGNI } n \geq n_0$$

DIVIDENDO PER n^2 SI HA:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$$

- SCEGLIENDO $c_2 \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$ VALE $\forall n \geq 1$

- SCEGLIENDO $0 < c_1 \leq \frac{1}{14}$, $c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ VALE $\forall n \geq 7$

- DUNQUE, AD ESEMPIO, $\frac{1}{14}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2$, $\forall n \geq 7$

ES. $6n^3 \neq O(n^2)$

- SE FOSSE $6n^3 = O(n^2)$, ALLORA ESISTEREBBERO $C_2 > 0$
ED $n_0 \in \mathbb{N}$ TALI CHE $6n^3 \leq C_2 n^2$, PER $n \geq n_0$

- DIVIDENDO PER n^2 , $6n \leq C_2$, PER $n \geq n_0$, ASSURDO,

- ALLA STESSA MANIERA, SI VERIFICA CHE $6n^3 \neq O(n^2)$

LEMMA SIANO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \in g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$.

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

DIM (a) SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \in$ SIA $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$,

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} - a \right| < \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} - a < \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} < \frac{f(n)}{g(n)} < \frac{3}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2}g(n) < f(n) < \frac{3}{2}ag(n)$$

DA CUI $f(n) = \Theta(g(n))$.

(b) SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ \Leftrightarrow SIA $\varepsilon > 0$,

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \varepsilon \rightarrow 0 \leq f(n) < \varepsilon g(n) \Rightarrow f(n) \in O(g(n)).$$

(c) SIA $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ \Leftrightarrow SIA $c > 0$,

ESISTE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{f(n)}{g(n)} > c \rightarrow 0 < c g(n) < f(n) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n)).$$

COROLLARIO

§ IAWD

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a > 0 \implies f(n) = \Theta(g(n))$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a \geq 0 \implies f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \implies f(n) = \Omega(g(n))$



ES. SIA $P(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$ UN POLINOMIO DI GRADO d , CON $a_d > 0$

ALLORA $P(n) = \Theta(n^d)$.

INOLTRE $P(n) = O(n^\alpha)$, PER OGNI $\alpha \geq d$,

$P(n) = \Omega(n^\beta)$, PER OGNI $0 \leq \beta \leq d$

PER IL COROLLARIO PRECEDENTE E' SUFFICIENTE OSSERVARE CHE

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^d} = a_d > 0$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^\alpha} = a \geq 0, \text{ PER OGNI } \alpha \geq d$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^\beta} > 0, \text{ PER OGNI } 0 \leq \beta \leq d$$

CON LEGGERO ABUSO DI NOTAZIONE, SCRIVEREMO

$\Theta(1)$ AL POSTO DI $\Theta(n^0)$.

PER OGNI COSTANTE $c > 0$ SI HA: $c = \Theta(1)$

PROPRIETÀ

- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$
- $\Theta(g(n)) \subseteq \Omega(g(n))$
- $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

NOTAZIONE $o(g(n))$

$$o(g(n)) = \left\{ f(n) : \text{PER OGNI } c > 0 \text{ ESISTE } n_0 > 0 \text{ TALE CHE} \right. \\ \left. 0 \leq f(n) < c g(n), \text{ PER OGNI } n \geq n_0 \right\}$$

- SI OSSERVA CHE $n^2 \neq o(n^2)$

PROPRIETA'

PER $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

NOTAZIONE $\omega(g(m))$

$$\omega(g(m)) = \left\{ f(m) : \text{PER OGNI } c > 0 \text{ ESISTE } m_0 > 0 \text{ TALE CHE} \right. \\ \left. 0 \leq c g(m) < f(m), \text{ PER OGNI } m \geq m_0 \right\}$$

- SI OSSERVI CHE $n^2 \neq \omega(n^2)$

PROPRIETA'

PER $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$ SI HA:

$$f(m) = \omega(g(m)) \iff \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{f(m)}{g(m)} = +\infty$$

ALTRO USO DELLE NOTAZIONI ASINTOTICHE

- $h(n) = k(n) + \Theta(g(n))$ SIGNIFICA

ESISTE $f(n) = \Theta(g(n))$ TALE CHE $h(n) = k(n) + f(n)$

- $h(n) + \Theta(g(n)) = \Theta(k(n))$ SIGNIFICA

PER OGNI $f(n) = \Theta(g(n))$, $h(n) + f(n) = \Theta(k(n))$

RELAZIONI TRA LE VARIE NOTAZIONI

TRANSITIVITA'

$$f(m) = \mathcal{O}(g(m)) \wedge g(m) = \mathcal{O}(h(m)) \Rightarrow f(m) = \mathcal{O}(h(m))$$

(ANCHE PER $\mathcal{O}, \Omega, o, \omega$)

RIFLESSIVITA'

$$f(m) = \mathcal{O}(f(m))$$

$$f(m) = \mathcal{O}(f(m))$$

$$f(m) = \Omega(f(m))$$

ANTI RIFLESSIVITA'

$$f(m) \neq o(f(m))$$

$$f(m) \neq \omega(f(m))$$

SIMMETRIA

$$f(n) = \odot(g(n)) \iff g(n) = \ominus(f(n))$$

SIMMETRIA TRASPOSTA

$$f(n) = \odot(g(n)) \iff g(n) = \mathcal{S}L(f(n))$$

$$f(n) = \circ(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$$

- SI OSSERVI L'ANALOGIA TRA IL CONFRONTO ASINTOTICO DI DUE FUNZIONI f, g E IL CONFRONTO DI DUE NUMERI REALI a, b

$$f(n) = O(g(n)) \quad \approx \quad a \leq b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \quad \approx \quad a \geq b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \approx \quad a = b$$

$$f(n) = o(g(n)) \quad \approx \quad a < b$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \quad \approx \quad a > b$$

- TUTTAVIA LA PROPRIETA' DI TRICOTOMIA NON E' VALIDA PER IL CONFRONTO ASINTOTICO :

$$f(n) = n$$

$$g(n) = n^{1 + \sin n}$$

$f(n)$ E $g(n)$ NON SONO

ASINTOTICAMENTE CONFRONTABILI

NOTAZIONI STANDARD E FUNZIONI COMUNI

$$\lfloor x \rfloor = (\text{massimo intero } \leq x) \quad (\text{floor})$$

$$\lceil x \rceil = (\text{minimo intero } \geq x) \quad (\text{ceiling})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{N}^+$$

$$\lceil \lceil \frac{n}{a} \rceil / b \rceil = \lceil \frac{n}{ab} \rceil, \quad \lfloor \lfloor \frac{n}{a} \rfloor / b \rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$$

- $f(n)$ È POLINOMIALMENTE LIMITATA SE

$$f(n) = O(n^k), \text{ PER QUALCHE } k \geq 0$$

ESPOENZIALI

- POICHE' $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$, $\forall b \forall a > 1$

SI HA CHE $n^b = o(a^n)$

$$- e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$- e^x \geq 1 + x$$

$$- |x| \leq 1 \Rightarrow 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

$$- e^x = 1 + x + O(x^2)$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

LOGARITMI

$$\lg n := \log_2 n \quad (\text{LOGARITMO BINARIO})$$

$$\ln n := \log_e n \quad (\text{LOGARITMO NATURALE})$$

$$|x| < 1 \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$x > -1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

- $f(n)$ E' POLLOGARITMICAMENTE LIMITATA SE $f(n) = O(\lg^k n)$
PER QUALCHE k

$$- a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0 \quad \text{E DUNQUE} \quad \lg^b n = o(n^a)$$

$$- \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad ; \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad ; \quad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

FATTORIALI

FORMULA DI APPROSSIMAZIONE DI STIRLING:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- $n! = o(n^n)$

- $n! = \omega(2^n)$

- $\lg(n!) = \mathcal{O}(n \lg n)$

- $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$, con $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$

SOMMATORIE

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \mathcal{O}(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \mathcal{O}(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \mathcal{O}(n^4)$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$|x| < 1 \implies \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + \mathcal{O}(1)$$