(a) Supponiamo di avere una griglia rettangolare di dimensioni $n \times m$ e indichiamo con (i, j) il nodo posizionato all'intersezione della i-esima riga e j-esima colonna, con $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.
Supponiamo inoltre che dal nodo (i, j) sia possibile raggiungere soltanto i nodi $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ e $(i+1, j+1)$ (se presenti), in ciascun caso con il medesimo costo $C(i, j)$, dove C è una data matrice $n \times m$ di interi non negativi.
Utilizzando la metodologia della programmazione dinamica, si descriva un algoritmo per il calcolo del *costo minimo* di un percorso consentito dal nodo $(1, 1)$ al nodo (n, m) e lo si analizzi dal punto di vista della complessità computazionale.

(b) **(Facoltativo)** Si estenda il precedente algoritmo in modo da calcolare un *percorso di costo minimo* dal nodo $(1, 1)$ al nodo (n, m).

Dato un array bidimensionale $a[1..2, 1..n]$ di interi relativi, con $n \geq 2$, utilizzando la metodologia della programmazione dinamica si progetti un algoritmo che calcoli n costanti $1 \leq c_i \leq 2$, con $i = 1, \ldots, n$, tali che

- $c_i + c_{i+1} \leq 3$, per $i = 1, \ldots, n-1$,
- $\sum_{i=1}^{n} a[c_i, i]$ sia massima,

e lo si analizzi dal punto di vista della complessità computazionale.

Si illustri inoltre l'algoritmo sul seguente array $a[1..2, 1..6]$:

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	6	5	-4	7	3
2	8	1	7	-5	3	4

La celebre programmatrice Penelope C., chiamata a scrivere per conto della compagnia navale Ulysses un programma per il calcolo ottimale del prodotto di sequenze di matrici, per errore produce un algoritmo che effettua tali prodotti nel *peggior* modo possibile.

(a) Si definisca in maniera precisa il problema della moltiplicazione di sequenze di matrici.
(b) Utilizzando la metodologia della programmazione dinamica, si ricostruisca l'algoritmo trovato da Penelope C.
(c) Si stabilisca se esistono sequenze di matrici il cui prodotto viene calcolato in maniera ottimale anche dal programma di Penelope C.

Sia $\otimes$ un'operazione *associativa* su matrici di numeri reali tale che, date due matrici A e B rispettivamente di dimensioni $p \times q$ e $q \times r$, produce una matrice $A \otimes B$ di dimensione $p \times r$, effettuando $pq + r^2$ operazioni elementari.

Sia $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ una sequenza di matrici di dimensioni $p_{i-1} \times p_i$, per $i = 1, 2, \ldots, n$.

Utilizzando la metodologia della programmazione dinamica, si descriva un'algoritmo per determinare la parentesizzazione della sequenza $\mathcal{A}$ che consenta di calcolare la matrice

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots \otimes A_n$$

con il minor numero possibile di operazioni elementari.

Qual è la complessità dell'algoritmo trovato in funzione della lunghezza n della sequenza $\mathcal{A}$?

ESERCIZIO 3

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, i cui nodi sono coppie (i, j), con $1 \leq i, j \leq n$ e i cui archi connettono il generico nodo (i, j) esattamente con i nodi $(i, j + 1), (i, j + 2), \ldots, (i, n)$ (se presenti) e con i nodi $(i + 1, j), (i + 2, j), \ldots, (n, j)$ (se presenti). Si supponga che il costo per passare dal nodo (i, j) ad un nodo (i, k) (con $k > j$) ad esso adiacente sia $f_1(i, j, k)$ e quello per passare dal nodo (i, j) ad un nodo (k, j) (con $k > i$) ad esso adiacente sia $f_2(i, j, k)$, dove f_1 e f_2 siano due funzioni date, calcolabili in tempo $\mathcal{O}(1)$.

(a) Dopo aver verificato che il problema di determinare un percorso consentito di *costo minimo* dal nodo $(1, 1)$ al nodo (n, n) in G gode della proprietà della *sottostruttura ottima*, si descriva un algoritmo iterativo per il calcolo del *costo* di un siffatto cammino minimo e lo si analizzi dal punto di vista della complessità computazionale.

(b) Si descriva come estendere il precedente algoritmo in modo da poter calcolare effettivamente un *percorso di costo minimo* in G dal nodo $(1, 1)$ al nodo (n, n).