LIMITI INFERIORI PER L'ORDINAMENTO

- STABILIREMO UN LIMITE INFERIORE $\Omega(n \lg n)$ PER GLI ALGORITMI DI ORDINAMENTO BASATI SU CONFRONTI DEL TIPO

$$a_i < a_j \;,\; a_i \leq a_j \;,\; a_i = a_j \;,\; a_i \geq a_j \;,\; a_i > a_j$$

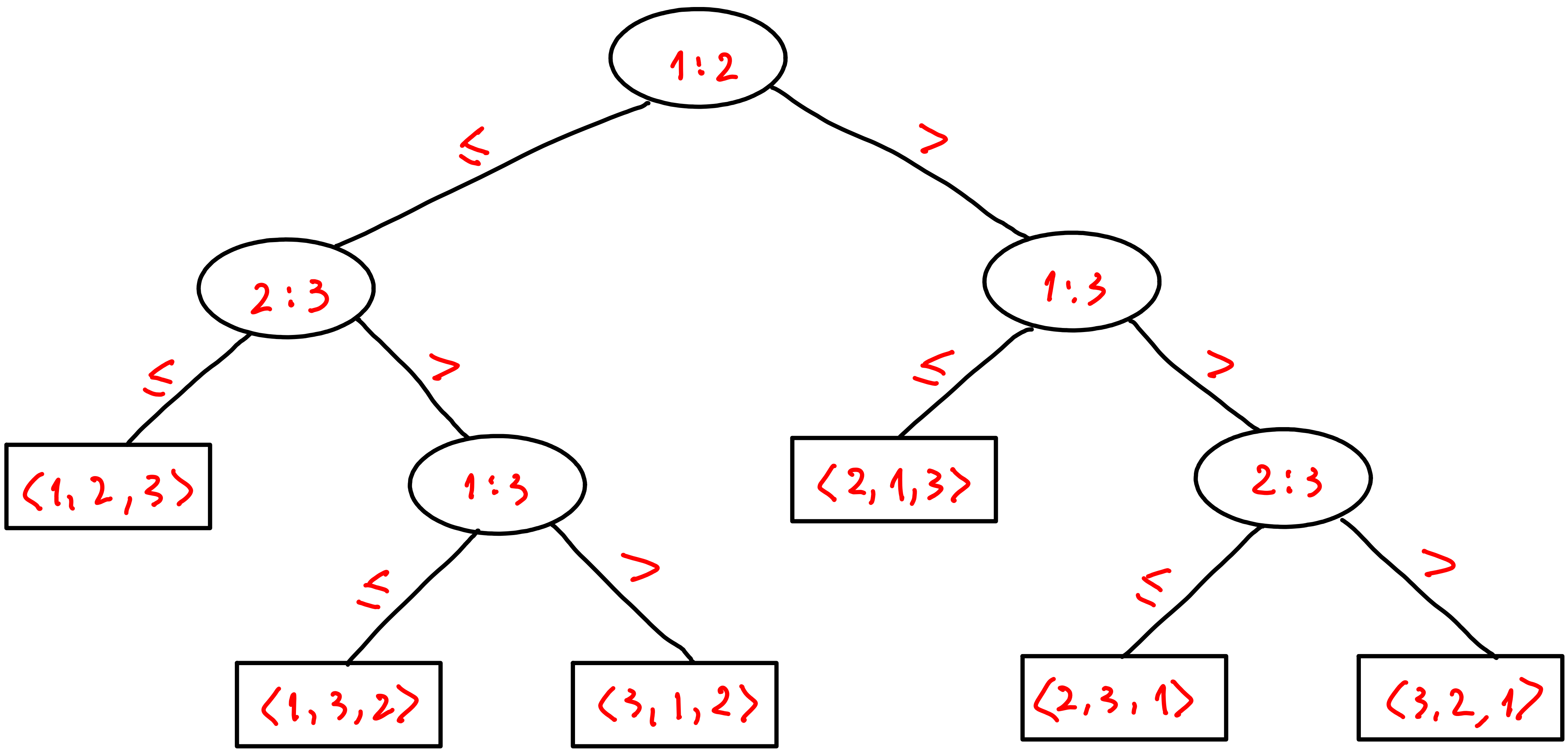
- POICHE' INOLTRE SUPPORREMO CHE TUTTI GLI ELEMENTI DI INPUT SIANO DISTINTI, SARANNO SUFFICIENTI TEST SOLTANTO DEL TIPO

$a_i \leq a_j$ (EQUIVALENTEMENTE, $a_i < a_j$)

IL MODELLO DELL'ALBERO DI DECISIONE

- UN ALBERO DI DECISIONE E' UN ALBERO BINARIO COMPLETO CHE RAPPRESENTA I CONFRONTI FRA ELEMENTI CHE VENGONO EFFETTUATI DA UN PARTICOLARE ALGORITMO DI ORDINAMENTO CHE OPERA SU UN INPUT DI UNA DATA DIMENSIONE
- OGNI NODO INTERNO E' RAPPRESENTATO DA UN'ESPRESSIONE $i:j$, CON $1 \leq i,j \leq n$ (TEST $a_i \leq a_j$)
- OGNI FOGLIA E' RAPPRESENTATA DA UNA PERMUTAZIONE $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$ DELL'INPUT
- L'ESECUZIONE DELL'ALGORITMO DI ORDINAMENTO EQUIVALE A TRACCIARE UN CAMMINO DALLA RADICE AD UNA FOGLIA

ALBERO DI DECISIONE PER INSERTION SORT CON 3 ELEMENTI



- CONDIZIONE NECESSARIA PERCHE' UN DATO ALGORITMO DI ORDINAMENTO SIA CORRETTO E' CHE, PER OGNI n, CIASCUNA DELLE $n!$ PERMUTAZIONI APPAIA COME UNA DELLE FOGLIE DEL CORRISPONDENTE ALBERO DI DECISIONE

TEOREMA QUALSIASI ALGORITMO DI ORDINAMENTO PER CONFRONTI RICHIEDE $\Omega(n \lg n)$ CONFRONTI NEL CASO PEGGIORE

DIM. DATO $n \in \mathbb{N}^+$, L'ALBERO DI DECISIONE T_n^a CORRISPONDENTE AD UN DATO ALGORITMO DI ORDINAMENTO a ED ALLA DIMENSIONE n AVRÀ ALMENO $n!$ FOGLIE.

- POICHE' UN ALBERO BINARIO DI ALTEZZA k HA AL PIÙ 2^k FOGLIE, POSTO $h = height(T_n^a)$, SI HA:

$$2^h \geq n! \longrightarrow h \geq \lg(n!) = \Omega(n \lg n)$$

INFATTI:

$$\lg(n!) = \sum_{i=1}^{n} \lg i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \lg i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \lg \frac{n}{2}$$

$$= \left(n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right) \lg \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \lg n - \frac{n}{2} = \Omega(n \lg n) \quad \blacksquare$$

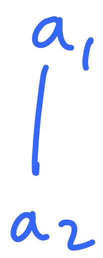
COROLLARIO HEAPSORT E MERGE-SORT SONO ALGORITMI DI ORDINAMENTO PER CONFRONTI ASINTOTICAMENTE OTTIMALI

n	n!	min h t.c. $2^h \geq n!$
2	2	1
3	6	3
4	24	5
5	120	7
6	720	10
7	5040	13
8	40320	16
9	362880	19
10	3628800	22

ORDINARE 5 ELEMENTI CON 7 CONFRONTI

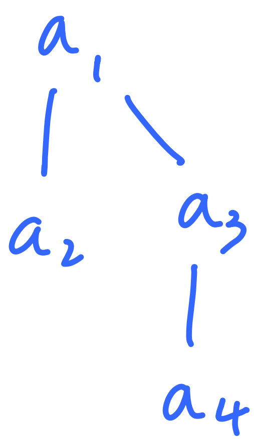
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

I confronto : $a_1 < a_2$ (senza perdere di generalità)



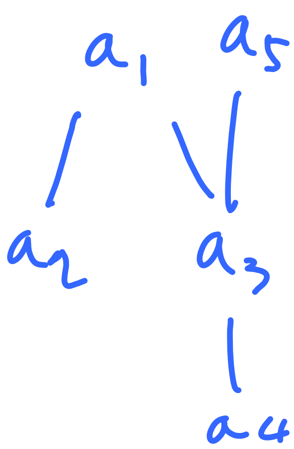
II confronto : $a_3 < a_4$ (senza perdere di generalità)

III confronto : $a_1 < a_3$ (senza perdere di generalità)

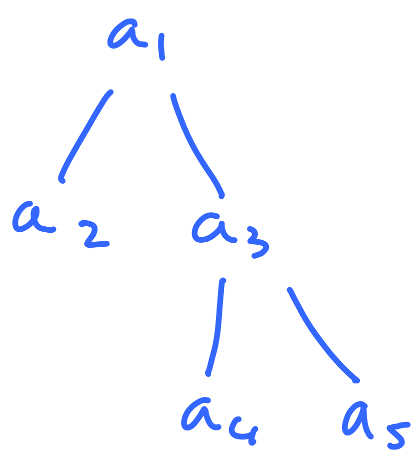


IV confronto: $a_3 : a_5$

CASO: $a_5 < a_3$



CASO: $a_3 < a_5$



7 possibilità $\le 2^3$

$a_5 \quad a_1 \times a_3 \times a_4 \times$

a_2

$a_1 \times a_5 \times a_3 \times a_4 \times$

8 possibilità $\le 2^3$

$a_1 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times$

a_2

$a_1 \times a_3 \times a_5 \times a_4 \times$

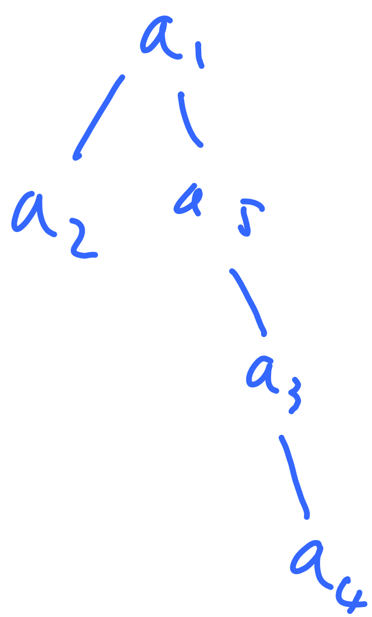
CASO : $a_5 < a_3$

V confronto : $a_1 : a_5$

CASO : $a_5 < a_1$

confrontando a_2 con a_3 e con a_4 si termina (7 confronti)

CASO : $a_1 < a_5$



confrontando a_2 con a_3 e quindi con a_5 o con a_4 si termina (7 confronti)

CASO: $a_3 < a_5$

V confronto: $a_4 : a_5$

con altri DUE confronti
con gli elementi a_3, a_4, a_5
(prima con il mediano dei tre)
a_2 viene inserito nella sua
posizione corretta

Totale: 7 confronti

ESERCIZI

8.1-1

What is the smallest possible depth of a leaf in a decision tree for a comparison sort?

8.1-3

Show that there is no comparison sort whose running time is linear for at least half of the $n!$ inputs of length n. What about a fraction of $1/n$ of the inputs of length n? What about a fraction $1/2^n$?

$$2^h \geq \frac{n!}{n} = (n-1)! \qquad h \geq \lg (n-1)! = \Omega(n \lg n)$$

$$h \geq \lg \frac{n!}{2} = \lg n! - 1 = \Omega(n \lg n)$$

$$2^h \geq \frac{n!}{2^n}, \qquad h \geq \lg \frac{n!}{2^n} = \lg n! - \lg 2^n$$

$$= \lg n! - n = \Omega(n \lg n)$$

8.1-4

Suppose that you are given a sequence of n elements to sort. The input sequence consists of n/k subsequences, each containing k elements. The elements in a given subsequence are all smaller than the elements in the succeeding subsequence and larger than the elements in the preceding subsequence. Thus, all that is needed to sort the whole sequence of length n is to sort the k elements in each of the n/k subsequences. Show an $\Omega(n \lg k)$ lower bound on the number of comparisons needed to solve this variant of the sorting problem. (*Hint:* It is not rigorous to simply combine the lower bounds for the individual subsequences.)

$$\underbrace{\ldots}_{k} < \underbrace{\ldots}_{k} < \ldots < \underbrace{\ldots}_{k}$$

$$\underbrace{k! \cdot k! \cdot \ldots \cdot k!}_{\frac{n}{k}}$$

$\frac{n}{k}$

$k \lg k$

$$2^h \geq (k!)^{\frac{n}{k}}$$

$$h \geq \lg (k!)^{\frac{n}{k}} = \frac{n}{k} \lg (k!)$$

$$= \Omega\left(\frac{n}{\cancel{k}} \cdot \cancel{k} \lg k\right) = \Omega(n \lg k)$$